

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и
математическое обеспечение»

А.В. Калинин

Математические задачи физической диагностики
Корректность задач электромагнитной теории в стационарном
и квазистационарном приближении

*Учебно-методические материалы по программе повышения
квалификации «Информационные технологии и компьютерное
моделирование в математике и механике»*

Нижний Новгород

2007

*Учебно-методические материалы подготовлены в рамках
инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-научный центр
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и
математическое обеспечение»*

Калинин А.В. Математические задачи физической диагностики. Корректность задач электромагнитной теории в стационарном и квазистационарном приближении. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Информационные технологии и компьютерное моделирование в математике и механике». Нижний Новгород, 2007, 121 с.

В работе рассматриваются математические задачи для системы уравнений Максвелла в стационарном и квазистационарном приближении. Подробно изучаются функциональные пространства, в которых определяются обобщенные решения соответствующих задач. Обсуждаются и приводятся новые результаты для постановок задач об определении электромагнитных полей в неоднородных областях.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Основные функциональные пространства	11
1.1. Операторные уравнения в гильбертовых пространствах	11
1.2. Определение функциональных пространств	16
Глава 2. Краевые задачи для стационарной системы уравнений Максвелла	34
2.1. Постановка задач	34
2.2. Существование и свойства решений	40
2.3. Асимптотический анализ решений системы уравнений Максвелла при малых значениях коэффициентов в подобластях	51
Глава 3. Некоторые нестационарные задачи для системы уравнений Максвелла	61
3.1. Разрешимость начально-краевых задач и свойства решений	61
3.2. Изучение соответствующих задач с использованием векторного и скалярного потенциалов	78
Заключение	97
Литература	98
Приложение	112

ВВЕДЕНИЕ

Спектр математических задач физической диагностики чрезвычайно широк и вряд ли поддается полному описанию. Среди этих задач чрезвычайно важным классом являются задачи, связанные с моделями физических явлений, использующими аппарат дифференциальных уравнений с частными производными.

Условно эти задачи разбиваются на два класса – прямые и обратные задачи. Решение прямых задач с математической точки зрения связано с нахождением решений дифференциальных уравнений или систем с частными производными при некоторых дополнительных ограничениях на неизвестную функцию (начальные условия, краевые условия и др.) При этом принципиальным вопросом является корректность постановки прямых задач. Главной математической задачей в этом случае является доказательство теорем о существовании, единственности решения и непрерывной зависимости решения от данных задачи в функциональных классах, определяемых постановкой задачи.

Обратные задачи заключаются в определении величин, которые в теории уравнений в частных производных обычно квалифицируются как коэффициенты, правые части (источники), начальные данные, граничные данные и т.д. В этих случаях считается, что существует частичная информация о самом решении, о коэффициентах задачи, по которой требуется восстановить какую-либо физически интересную характеристику.

В настоящее время разработано множество методов решения конкретных обратных задач физической диагностики. Интенсивное развитие математической теории решения таких задач началось с пионерских работ А.Н. Тихонова и его научной школы [140].

Одним из классических объектов для изучения обратных задач является, в частности, интегральное уравнение Фредгольма первого рода $u=T(f)$, где T – некоторый интегральный оператор, f – неизвестная функция, имеющая физический смысл источников (а также начальных или граничных условий и т.п.), а u – решение дифференциального уравнения с частными производными или какая-либо связанная с ним функция.

В простейших задачах математической физики интегральный оператор T может определяться явно в результате построения функции Грина. Однако при изучении задач в областях со сложной геометрией или задач, требующих определения физических полей в неоднородных областях, приводящих к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, построение явной функции Грина является неразрешимой задачей. В этом случае связь $u=T(f)$ решения дифференциального уравнения u с данными задачи f можно трактовать с помощью разрешающего оператора задачи T . Свойства этого

разрешающего оператора непосредственно связаны с изучением свойств решения прямых задач, и на основании свойств разрешающего оператора T можно также строить эффективные алгоритмы решения конкретных обратных задач.

В настоящей работе затрагивается круг вопросов, связанных с изучением прямых задач для некоторых классов моделей, возникающих в электромагнитной теории и изучением свойств разрешающих операторов. Прямые и обратные задачи электромагнитной теории имеют широкий спектр приложений и класс этих задач чрезвычайно обширен. В этой работе рассматриваются линейные стационарные и квазистационарные задачи в магнитном приближении в ограниченных областях с неоднородными средами.

Краткий обзор научной литературы, посвященной этим вопросам, дающийся ниже, не претендует на полноту и в нем затронута лишь часть работ, близких тематике научно-исследовательской и педагогической деятельности автора.

Системы дифференциальных уравнений в частных производных, содержащие дифференциальные операции векторного анализа (rot , div , grad), находят свое применение в различных разделах фундаментальной и прикладной науки, например, в гидродинамике, электродинамике сплошных сред ([64], [65], [66], [75], [105], [110], [120], [139], [149]).

Большинство имеющих практический интерес задач допускают лишь приближенное решение с применением вычислительной техники. При разработке, обосновании и анализе алгоритмов численного решения этих задач, изучении вопросов оптимального управления распределенными системами, важную роль играет теоретическое исследование корректности соответствующих начально-краевых и краевых задач, разработка, обоснование и анализ алгоритмов численного решения этих задач ([1] -[4], [24], [31], [35], [37], [67], [86], [98], [115]-[117], [129], [122], [135], [141], [143], [151], [159], [164], [174], [180]).

При изучении вопросов корректности постановок различных задач, построения численных схем и их обоснования, при исследовании задач оптимизации, важную роль играют свойства классов функций, в которых рассматриваются проблемы разрешимости.

Задачам исследования функциональных классов, связанных с дифференциальными операциями векторного анализа посвящены работы Г. Вейля ([19]), Э.Б. Быховского, Н.В. Смирнова ([17], [18]), С.Г. Крейна ([62]), С.Л. Соболева [127], Р. Темама ([138]). Развитие идей, заложенных в [19] и применение полученных результатов к изучению различных математических задач гидродинамики, начатое трудами Ж. Лера ([170]-[172]), продолжилось в работах Ж. Неууд, [166], [167], О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова, А. А. Ки-

селева ([56], [71], [76], [131]) В. Н. Масленниковой, А. А. Дезина, М. Е. Боговского, М. А. Тимошина ([16], [87] - [91]), А. Т. Плотницкого [109], Ю. А. Дубинского ([32], [33]).

Важнейшую роль при изучении корректности обобщенных формулировок краевых и начально-краевых задач играют различные неравенства, такие, как неравенства Фридрихса, Пуанкаре, Корна (неравенства такого типа часто в литературе называются неравенствами Корна).

В задачах гидродинамики и электродинамики однородных сред используется неравенство, связывающее норму вектор-функции, касательная или нормальная составляющая которой на границе области равна нулю, норм ее ротора и дивергенции в пространстве L_2 :

$$\|\mathbf{\bar{u}}\| \leq C(\|\operatorname{rot} \mathbf{\bar{u}}\| + \|\operatorname{div} \mathbf{\bar{u}}\|), \quad (0.1)$$

где положительная величина C зависит только от характеристик области.

В работах [17], [18] эта оценка установлена для соленоидальных функций с использованием свойств интеграла типа потенциала, в [109], [138] она доказана на основе полученного в [34] неравенства, связывающего нормы функции, ее ротора, дивергенции и градиента. Зависимость константы в неравенстве (0.1) от геометрии области определена М. П. Галаниным, Ю. П. Поповым в [24].

С помощью оценки (0.1) доказывается, в частности, вложение пространств функций с суммируемыми ротором и дивергенцией в пространства Соболева.

Достаточно широко в литературе освящен вопрос, связанный с изучением различных задач для систем уравнений, содержащих дифференциальные операции векторного анализа, имеющих приложения в электродинамике и магнитной гидродинамике.

В работах [5]-[7] строятся решения стационарных и нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла в пространстве обобщенных функций. Фундаментальные решения для уравнений Максвелла рассматриваются также в [80].

Для описания электромагнитного поля при функциональной зависимости общего вида $\mathbf{\bar{B}}(\mathbf{\bar{H}})$, $\mathbf{\bar{D}}(\mathbf{\bar{E}})$ Самохиным А.Б. в работе [118] строится система сингулярных интегральных уравнений.

Исследование дифференциальных свойств решений задач гидродинамики опирается обычно на стандартную технику для эллиптических систем ([25], [61], [78], [102], [104], [145], [150], [157], [158]) и связано с получением для решения априорных оценок в пространствах Соболева более высокого порядка и в пространствах Гельдера ([121], [130], [132]). Для применения указанной схемы исследования к задачам для системы уравнений

Максвелла в работах [11]–[15], [26], [92], [93], [179] рассматривается его расширение и погружение тем самым исходной задачи в эллиптическую задачу большей размерности. Корректность определения оператора Максвелла в негладких областях в связи с задачей колебания полого резонатора обсуждалась в работах М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка ([11]–[15]). В работах С. И. Матюкевича ([92], [93]) получено асимптотическое представление решения системы уравнений Максвелла вблизи особенностей границы.

Изучение нестационарных проблем обычно включает в себя исследование поведения решения на бесконечном интервале времени ([96], [97], [177], [178], [181]). Значительные результаты в этом направлении дает рассмотрение полугруппы, порождаемой оператором задачи ([55], [95], [153]–[155]).

Во многих имеющих практический интерес случаях рассматривается система уравнений Максвелла квазистационарном магнитном приближении ([64], [79], [117], [137], [169]). При этом тип системы меняется с гиперболического на параболический и задача, как и в стационарном случае, допускает обобщенную формулировку в виде интегрального тождества.

Разрешающие соотношения, полученные в результате постановки задач в виде вариационных принципов и интегральных тождеств, могут служить исходными для применения методов Ритца и Галеркина, что обеспечивает единство инструментальных средств при решении комплексных физических проблем в сплошных средах.

Одним из требований, предъявляемым к вычислительным алгоритмам, является свойство однородности ([115], [141]), позволяющее вести расчет во всей области по одним и тем же формулам, не выделяя явно какие-либо особенности решения. При наличии в расчетной области непроводящих включений базисные функции при дискретизации должны удовлетворять условию $\text{rot} \vec{u} = 0$ в диэлектрике. Вопрос о построении однородных вычислительных алгоритмов решения задач для квазистационарной системы уравнений Максвелла в среде с непроводящими включениями, однозначности определения электрического поля, рассматривается в работе [24] Галанина М. П., Попова Ю. П. Для стационарных электродинамических задач в [51] был предложен метод слабой проводимости, позволяющий искать решение во всей области.

Существенной проблемой численного решения стационарных и квазистационарных задач электродинамики является проблема учета условия соленоидальности вектора магнитной индукции, не позволяющего использовать классические базисные функции при дискретизации функциональных пространств. Этот вопрос обсуждался в связи с задачами

динамики вязкой несжимаемой жидкости и его решение связано с введением специальных аппроксимирующих пространств либо с организацией итерационных процессов ([58], [59], [138], [159], [166]).

Преодолеть трудности, связанные с наличием соленоидальности, можно с помощью метода искусственной сжимаемости, который заключается в добавлении к исходной системе члена вида $\gamma^{-1} \text{grad div } \dot{\mathbf{u}}$ ([138]). Метод аппроксимации нестационарных уравнений Навье – Стокса системой типа Коши-Ковалевской на основе метода искусственной сжимаемости предложен Г. М. Кобельковым ([58], [59]). Аналогичный подход к задачам для системы уравнений Максвелла позволяет получить обобщенные постановки краевых задач, при которых в стационарном случае условие соленоидальности является свойством решения ([50]), а в квазистационарном экспоненциально устойчиво по времени.

В реальных ситуациях коэффициенты систем уравнений, описывающих различные физические процессы, могут зависеть от различных характеристик физико-механических полей, что приводит, в частности, к зависимости коэффициентов от пространственных координат ([99], [118], [120], [136], [137], [144], [148]). Например, уравнения Максвелла приходится изучать совместно с уравнениями механики сплошных сред (уравнения магнитной гидродинамики, магнитотермоупругости) или с кинетическими уравнениями для функций распределения заряженных частиц. Во всех этих случаях задача определения электромагнитных полей является частью решения более сложных, как правило, нелинейных задач.

Система уравнений Максвелла в ферромагнитной среде, где $\dot{\mathbf{B}} = m \left(\left| \dot{\mathbf{H}} \right| \right) \dot{\mathbf{H}}$, μ – известная положительная функция рассмотрена А. А. Березовским, Т. А. Плотницким в [10]. Решение начально-краевой задачи при определенных условиях на функцию μ ищется методом Бубнова-Галеркина.

В случае негладких коэффициентов системы разрешимость в классическом смысле рассматриваемых задач может не иметь места и на первый план выходит изучение их обобщенных постановок ([5]-[7], [21], [23], [63], [68], [70], [76]-[78], [91], [162], [167], [168], [170]-[172]). При этом оценки типа (0.1) не могут быть непосредственно применены для исследования корректности постановок, что приводит к серьезным проблемам при изучении обобщенных формулировок задач. В частности, в системе уравнений Максвелла используются дифференциальные операции вида $\text{rot } \dot{\mathbf{u}}$ и $\text{div } s \dot{\mathbf{u}}$, где коэффициент σ не

является гладкой функцией. В этом случае оценки нормы $\dot{\mathbf{u}}$ в пространствах Соболева через нормы $\text{rot } \dot{\mathbf{u}}$ и $\text{div } s\dot{\mathbf{u}}$, вообще говоря, не имеют места.

В работах О. А. Ладыженской, И. И. Рохкинда, В. А. Солонникова ([73], [75], [114], [131]) рассматриваются задачи дифракции и магнитной гидродинамики с кусочно-непрерывными коэффициентами. При этом обобщенные задачи формулируются в виде интегральных тождеств, справедливость которых влечет выполнение условий согласования на границах различных сред. Исследование дифференциальных свойств решений поставленных задач ведется внутри областей, в которых коэффициенты являются непрерывными функциями ([131]).

Задачи для системы уравнений Максвелла с кусочно-постоянными коэффициентами магнитной и диэлектрической проницаемости исследуются в работе Г. Дюво, Ж.-Л. Лионса [34]. Решения задач ищутся в пространствах суммируемых функций $\dot{\mathbf{u}}$ таких, что $\text{rot } m^{-1}\dot{\mathbf{u}} \in L_2$. Принадлежность решений пространству Соболева H^1 устанавливается в областях постоянства коэффициентов.

Случай неоднородной неизотропной среды, в которой m, e – матрицы измеримых функций, рассматривается М. Ш. Бирманом в [12]. Вводятся в рассмотрение пространства функций $\dot{\mathbf{u}}$ таких, что $\text{div } s\dot{\mathbf{u}} \in L_2$, где s – матрица функций, определяются ортогональные разложения пространства L_2 с эквивалентной нормой. Вопрос о существовании априорных оценок типа неравенства Корна изучается при условии гладкости коэффициентов.

В статье [39] получены неравенства, связывающие при различных краевых условиях (равенство нулю на границе тангенциальной компоненты $\dot{\mathbf{u}}$ или нормальной компоненты $\dot{\mathbf{v}}$) скалярное произведение вектор-функций в L_2 , норму в L_2 ротора одной из них и дивергенцию другой:

$$(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) \leq C(\|\text{rot } \dot{\mathbf{u}}\| \|\dot{\mathbf{v}}\| + \|\text{div } \dot{\mathbf{v}}\| \|\dot{\mathbf{u}}\|), \quad (\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) \leq C(\|\text{rot } \dot{\mathbf{u}}\| \|\dot{\mathbf{v}}\| + \|\text{div } \dot{\mathbf{v}}\| \|\dot{\mathbf{u}}\| + \|\text{rot } \dot{\mathbf{u}}\| \|\text{div } \dot{\mathbf{v}}\|). \quad (0.2)$$

Неравенства (0.1) являются их следствием при $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{v}}$. Применяемые к функциям $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{v}} = m\dot{\mathbf{H}}$ оценки (0.2) позволили доказать разрешимость краевых задач для систем уравнений в частных производных, возникающих, в частности, при изучении системы уравнений Максвелла, единственным требованием к коэффициентам которой была их существенная ограниченность ([50], [52]).

В настоящем учебно-методическом пособии систематически изучаются основные функциональные пространства для дифференциальных операций векторного анализа. Рассматриваются различные постановки краевых задач для системы уравнений Максвелла в стационарном приближении и смешанных задач для системы уравнений Максвелла в

магнитном квазистационарном приближении. Доказываются теоремы о существовании и единственности обобщенных решений этих задач. Изучаются свойства решений.

Специально обсуждаются вопросы, связанные с корректностью постановок задач об определении электромагнитных полей в неоднородных областях. В дополнении к работе формулируются и доказываются оценки для скалярных произведений векторных полей, играющие важную роль при изучении вопросов корректности таких задач математической физики, как задачи электромагнитной теории, гидродинамики, механики сплошных сред.

Автор настоящих учебно-методических материалов приносит глубокую благодарность ассистенту кафедры математического моделирования экономических систем ННГУ им. Н.И. Лобачевского, кандидату физ.-мат. наук А.А. Тюхтиной, являющейся соавтором ряда приведенных в работе научных результатов и принявшей непосредственное участие в оформлении этой работы.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Глава содержит основные понятия и обозначения, напоминаются необходимые факты из функционального анализа. Доказательство приводимых утверждений содержится, например, в [21], [23], [38], [54], [68], [126], [138]. Вводятся функциональные классы, используемые при исследовании краевых и начально-краевых задач для систем уравнений в частных производных, содержащих дифференциальные операции векторного анализа.

1.1. Операторные уравнения в гильбертовых пространствах

Пусть H - вещественное гильбертово пространство с сопряженным H^* , $a(.,.)$ - билинейная форма на H , $f \in H^*$. Многие из рассматриваемых в работе краевых задач допускают следующую постановку:

найти элемент $u \in H$, такой, что

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \text{ для всех } v \in H. \quad (1.1)$$

Условие существования решения задачи (1.1) дает следующее утверждение, являющееся следствием теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.

Лемма 1.1. (Лемма Лакса - Мильграма). Пусть H - вещественное гильбертово пространство с сопряженным H^* , $a(.,.)$ - непрерывная коэрцитивная симметричная билинейная форма на H , то есть существуют такие числа $a_1, a_2 > 0$, что для всех $u, v \in H$

$$|a(u, v)| \leq a_2 \|u\| \|v\|, \quad a(u, u) \geq a_1 \|u\|^2.$$

Тогда для каждого $f \in H^*$ найдется единственный элемент $u \in H$, такой, что справедливо (1.1).

Лемма 1.2. Пусть $a : H \times H \rightarrow R^1$ - симметричная билинейная неотрицательно определенная ($a(u, u) \geq 0$ для всех $u \in H$) форма, $f \in H^*$. Тогда задача (1.1) определения элемента $u \in H$ эквивалентна вариационной задаче

$$I(u) \rightarrow \inf, \quad u \in H, \quad \text{где } I(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \langle f, u \rangle.$$

При математическом описании нестационарных процессов, протекающих в пространственной области Ω в течение интервала времени S часто используется подход, при котором работают с функциями времени, которые каждому моменту времени $t \in S$ ставят в соответствие функцию $u(t, .)$ положения, то есть рассматриваются функции,

определенные на временном интервале S со значениями в некотором пространстве функций положения. Утверждения, касающиеся свойств функций со значениями в банаховом пространстве, доказаны, например, в [23].

Пусть $S = (0, T)$, $T > 0$, X - банахово пространство с сопряженным X^* .

Функция $u : (0, T) \rightarrow X$ называется деминепрерывной, если для каждого $f \in X^*$ функция $\langle f, u(t) \rangle$ непрерывна.

Функция $u : (0, T) \rightarrow X$ дифференцируема в точке $t \in (0, T)$, если существует элемент $x \in X$, для которого $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \right\|_X = 0$.

x называется производной от u в точке t и обозначается $u'(t)$.

Функция $u : (0, T) \rightarrow X$ слабо дифференцируема в точке $t \in (0, T)$, если существует элемент $x \in X$, для которого

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \right\rangle = 0 \text{ при всех } f \in X^*.$$

x называется слабой производной от u в точке t и также обозначается $u'(t)$.

Через $C^k(0, T, X)$ обозначается множество функций из $(0, T)$ в X , обладающих непрерывными производными до порядка k включительно, а через $C_w^k(0, T, X)$ - множество функций из $(0, T)$ в X , обладающих деминепрерывными слабыми производными до порядка k включительно.

Если $u \in C_w^k(0, T, X)$, то $\langle f, u \rangle \in C^m(0, T)$ для всех $f \in X^*$. Если X слабо полно, то верно и обратное, при этом

$$\langle f, u^{(j)}(\cdot) \rangle = \frac{d^j}{dt^j} \langle f, u(\cdot) \rangle, j = 0, \dots, k.$$

$C^k(0, T, X)$ - банахово пространство относительно нормы

$$\|u\|_{C^k(0, T, X)} = \sum_{j=0}^k \sup_{t \in [0, T]} \|u^{(j)}(t)\|.$$

Если пространство X слабо полно, то $C_w^k(0, T, X)$ - полное локально выпуклое пространство, топология в котором задается при помощи полунорм

$$p_{f,j}(u) = \sup_{t \in (0, T)} \left| \langle f, u^{(j)}(t) \rangle \right|, f \in X^*, j = 0, \dots, k.$$

Последовательность $\{u_n\} \in C_w^k(0, T, X)$ сходится по этой топологии к функции u тогда и только тогда, когда при любом $f \in X^*$ последовательность $\langle f, u_n(\cdot) \rangle$ сходится в $C^k(0, T)$ к $\langle f, u(\cdot) \rangle$.

Через $L_p(0, T, X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначается множество всех измеримых по Бохнеру функций из $(0, T)$ в X , для которых $\int_0^T \|u\|_X^p < \infty$. Это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{p,X} = \left\{ \int_0^T \|u(t)\|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Если H - гильбертово пространство, то пространство $L_2(0, T, H)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{2,H} = \int_0^T (u(s), v(s)) ds$$

тоже является гильбертовым.

Функция $u: (0, T) \rightarrow X$ называется существенно ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что $\|u(s)\| \leq M$ для почти всех $s \in (0, T)$. Множество всех измеримых по Бохнеру существенно ограниченных функций из $(0, T)$ в X обозначается $L_\infty(0, T, X)$. Это банахово пространство относительно нормы

$$\|u\|_{\infty,X} = \text{vraisup} \|u(t)\|_X.$$

Лемма 1.3. Если $u \in L_1(0, T, X)$, $t_0 \in (0, T)$, то функция $v(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds$ почти всюду дифференцируема, причем $v'(t) = u(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Лемма 1.4. Если $u \in L_1(0, T, X)$, то для любого $f \in X^*$, $t \in (0, T)$

$$\int_0^t \langle f, u(s) \rangle ds = \left\langle f, \int_0^t u(s) ds \right\rangle.$$

Для $1 < p < \infty$ число $q = p/(p-1)$ называется сопряженным к p показателем. Показателем, сопряженным к $p = 1$ (соответственно, $p = \infty$), по определению считается $q = \infty$ (соответственно, $q = 1$).

Лемма 1.5. (неравенство Гельдера). Если $u \in L_p(0, T, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, $v \in L_q(0, T, X^*)$, где q - сопряженный к p показатель, то $\langle v(\cdot), u(\cdot) \rangle \in L_1(0, T)$ и

$$\int_0^T \langle v(s), u(s) \rangle ds \leq \|v\|_{q, X^*} \|u\|_{p, X}.$$

Теорема 1.1. Если пространство X рефлексивно или сепарабельно, $1 \leq p < \infty$, то каждый элемент $f \in (L_p(0, T, X))^*$ допускает точно одно представление в виде

$$f(u) = \int_0^T \langle v(s), u(s) \rangle ds \text{ для всех } u \in L_p(0, T, X),$$

где $v \in L_q(0, T, X^*)$, q - сопряженный к p показатель. Соответствие f а v линейно и

$$\|f\|_{(L_p(0, T, X))^*} = \|v\|_{q, X}.$$

Пусть $D(0, T)$ - класс непрерывных, бесконечно дифференцируемых в интервале $(0, T)$ функций, имеющих компактный носитель, содержащийся в $(0, T)$.

Распределением на $(0, T)$ со значениями в X называется линейное отображение пространства $D(0, T)$ в рассматриваемое со слабой топологией пространство X . Множество распределений обозначается через $D'(0, T, X)$.

Пусть функция $u: (0, T) \rightarrow X$ локально интегрируема по Бохнеру, то есть на любом компактном подынтервале $K \subset (0, T)$ принадлежит $L_1(K, X)$. Тогда ей можно поставить в соответствие распределение на $(0, T)$ со значениями в X по правилу

$$f_u(j) = \int_0^T j(s) u(s) ds, \quad j \in D(0, T).$$

Соответствие u а f_u является взаимно однозначным, если эквивалентные интегрируемые по Бохнеру функции считать равными.

Для каждого распределения $f \in D'(0, T, X)$ определяется производная $f' \in D'(0, T, X)$ по правилу

$$f'(j) = -f(j'), \quad j \in D(0, T).$$

Лемма 1.6. Пусть $u \in L_1(0, T, X)$, $x \in X$. Тогда определенная формулой $v(t) = x + \int_0^t u(s) ds$ функция $v \in C(0, T, X)$, рассматриваемая как элемент из $D'(0, T, X)$, имеет производную $v' = u$.

Лемма 1.7. Если $u' = 0$ для $u \in D'(0, T, X)$, то u - постоянная функция из $(0, T)$ в X , то есть для некоторого $x \in X$ $u(t) = x$ при почти всех $t \in (0, T)$.

Лемма 1.8. Пусть функции u, g принадлежат пространству $L_1(0, T, X)$. Тогда $u' = g$ в смысле распределений на $(0, T)$ со значениями в X в том и только в том случае, если для каждого $h \in X^*$ $\frac{d}{dt} \langle h, u \rangle = \langle h, g \rangle$ в смысле скалярных распределений на $(0, T)$. При этом u эквивалентна некоторой непрерывной функции из $(0, T)$ в X .

Пусть V, H - гильбертовы пространства, причем V сепарабельно, непрерывно вложено в H и плотно в нем. Норму элемента u в H, V, V^* обозначаем соответственно через $|u|, \|u\|, \|u\|_*$, скалярное произведение в H обозначается через $(\cdot, \cdot)$.

Каждый элемент $f \in H^*$, рассматриваемый только на V , определяет некоторый элемент $f_v \in V^*$. Соотношение $f \rightarrow f_v$ является взаимно однозначным, поскольку f однозначно определяется своими значениями на V . Следовательно, H^* можно отождествить с некоторым подпространством в V^* , причем H^* вложено в V^* непрерывно. Если для $x \in V$ $\langle f, x \rangle = 0$ при всех $f \in H^*$, то $x = 0$ и, таким образом, H^* плотно в V^* . Отождествляя по теореме Рисса H и H^* , приходим к включениям

$$V \subset H \equiv H^* \subset V^*,$$

где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны. В силу указанных отождествлений, скалярное произведение в H элементов $f \in H$ и $u \in V$ совпадает со значением функционала f на элементе u в смысле двойственности между V и V^* , то есть

$$(f, u) = \langle f, u \rangle \text{ для всех } f \in H, u \in V.$$

Рассмотрим множество функций

$$W = \{u \in L_2(0, T, V) : u' \in L_2(0, T, V^*)\}.$$

Пространство W является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_W = \|u\|_{2,V} + \|u'\|_{2,V^*}.$$

Лемма 1.9. Множество $C^1(0, T, V)$ в W плотно в W .

Согласно лемме 1.8, $W \subset C(0, T, V^*)$. Справедливо более сильное утверждение:

Лемма 1.10. W непрерывно вложено в $C(0, T, H)$. Для всех $u \in W$ имеет место следующее равенство, которое выполняется в смысле скалярных распределений на $(0, T)$:

$$\frac{d}{dt} |u|^2 = 2 \langle u', u \rangle.$$

Если $a(.,.)$ - симметричная билинейная непрерывная коэрцитивная форма на V , то есть для всех $u, v \in V$ $a(u, u) \geq a_1 \|u\|^2$, $a(u, v) \leq a_2 \|u\| \|v\|$, то для всех $u, v \in L_2(0, T, V)$

$$\int_0^T a(u(t), v(t)) dt \leq a_2 \|u\|_{L_2(0, T, V)} \|v\|_{L_2(0, T, V)}, \quad \int_0^T a(u(t), u(t)) dt \geq a_1 \|u\|_{L_2(0, T, V)}^2.$$

Таким образом, $\int_0^T a(u(t), v(t)) dt$ - симметричная билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $L_2(0, T, V)$. Для функции $w \in V$ через Aw обозначим элемент из V^* такой, что для всех $v \in V$ $\langle Aw, v \rangle = a(w, v)$. Тогда для $u \in L_2(0, T, V)$ $Au \in L_2(0, T, V^*)$ и тем самым определен оператор $A: L_2(0, T, V) \rightarrow L_2(0, T, V^*)$.

Пусть $f \in L_2(0, T, V^*)$, $h \in H$. Рассмотрим задачу определения функции $u \in L_2(0, T, V)$, удовлетворяющей равенству

$$\frac{d}{dt}(u, v) + a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{при всех } v \in V \quad (1.2)$$

и начальному условию

$$u(0) = h. \quad (1.3)$$

Если $u \in L_2(0, T, V)$ - решение задачи (1.2), то, согласно леммам 1.9, 1.11, $u' = f - Au \in L_2(0, T, V^*)$, $u \in W \subset C(0, T, H)$, то есть условие (1.3) имеет смысл.

Теорема 1.2. Задача (1.2), (1.3) имеет единственное решение $u \in L_2(0, T, V)$. При этом $u \in W \subset C(0, T, H)$ и соответствие $h \rightarrow u$ как отображение из H в $C(0, T, H)$ непрерывно.

Утверждение теоремы может быть доказано с помощью метода Фаздо-Галеркина ([23], [34], [138]).

Лемма 1.11. Если в (1.2), (1.3) $f \in L_2(0, T, H)$, $h \in V$, то $u' \in L_2(0, T, H)$.

Теорема 1.3. Пусть $f \in C^1(0, T, H)$, элемент $h \in V$ таков, что $|a(h, v)| \leq k|v|$ для всех $v \in V$. Тогда решение задачи (1.2), (1.3) лежит в классе $C_w^1(0, T, H) \cap C(0, T, V)$.

Теорема 1.4. Пусть $f \in C^1(0, T, H)$, $h \in H$. Тогда решение задачи (1.2), (1.3) лежит в классе $C_w^1(d, T, H) \cap C(d, T, V)$ для любого $d \in (0, T)$.

1.2. Определение функциональных пространств

Пусть R^n - n -мерное евклидово пространство. Его точки обозначаются через $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, канонический базис - через $\bar{e}_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$,

$\vec{e}_2 = \{0, 1, \dots, 0\}, \dots, \vec{e}_n = \{0, \dots, 0, 1\}$. Для скалярного произведения и евклидовой нормы в R^n используются обозначения

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x} \cdot \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

$$|\vec{x}| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

При $n = 3$ определено векторное произведение

$$\vec{x} \times \vec{y} = [\vec{x} \times \vec{y}] = \{x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1\}.$$

Пусть $\Omega \subset R^n$ - открытое множество. Его замыкание в R^n обозначаем через $\overline{\Omega}$, границу – через $\partial\Omega$. По определению, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Через $mes(\Omega)$ обозначается лебегова мера множества Ω , через $d(\Omega)$ - его диаметр, $d(\Omega) = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in \Omega} |\vec{x} - \vec{y}|$.

Множество Ω называется звездным относительно точки $\vec{y} \in \Omega$, если для всех $\vec{x} \in \Omega$ и $t \in [0, 1]$ справедливо включение $\vec{y} + t(\vec{x} - \vec{y}) \in \Omega$.

Открытое в R^n множество Ω принадлежит классу C^r ($r \in N$), если его граница является $(n-1)$ - мерным многообразием класса C^r и само множество локально расположено по одну сторону $\partial\Omega$.

Для любой области Ω с достаточно гладкой границей при почти всех $\vec{x} \in \partial\Omega$ определен единичный вектор внешней нормали, обозначаемый в дальнейшем через $\vec{n}(\vec{x})$. Для функций $\vec{u} : \overline{\Omega} \rightarrow R^n$ используются обозначения

$$u_n(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}), \quad \vec{u}_n(\vec{x}) = u_n(\vec{x}) \vec{n}(\vec{x}), \quad \vec{u}_t(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) - \vec{u}_n(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \partial\Omega.$$

Поскольку $\vec{u} \times \vec{n} = \vec{u}_t \times \vec{n}$, $\vec{u}_t = \vec{n} \times [\vec{u} \times \vec{n}]$, то $\vec{u}_t(\vec{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{u}(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) = 0$.

Дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, обозначается через ∂_i , если $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - мультииндекс, то ∂^a - это дифференциальный оператор $\partial^a = \partial_1^{a_1} \partial_2^{a_2} \dots \partial_n^{a_n} = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}$, где $|a| = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Для дифференцируемых функций $\vec{u} : \Omega \rightarrow R^n$ ($\vec{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$), $\varphi : \Omega \rightarrow R^1$ основные дифференциальные операции записываются в виде

$$\text{div } \vec{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \dots + \partial_n u_n, \quad \text{grad } \varphi = \{\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \dots, \partial_n \varphi\}.$$

При $n = 3$

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \{\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1\}.$$

Справедливы тождества:

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{u}) = \varphi \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div}[\vec{u} \times \vec{v}] = \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{rot}(j \vec{u}) = j \operatorname{rot} \vec{u} + [\operatorname{grad} j \times \vec{u}], \quad (1.6)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} j = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0. \quad (1.7)$$

Пусть L - некоторое пространство функций из Ω в R^1 . Через $\{L\}^m$ ($m \in N$) обозначается пространство вектор-функций $\vec{u} : \Omega \rightarrow R^m$, $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_m\}$, таких, что $u_i \in L$ при $i = 1, 2, \dots, m$.

Через $C^k(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots$, обозначается класс непрерывных в области Ω функций $u : \Omega \rightarrow R^1$, все частные производные $\partial^a u$ которых порядка $|a| \leq k$ существуют и непрерывны в Ω (при этом $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ - класс непрерывных функций); через $C^k(\overline{\Omega})$, $k = 0, 1, \dots$, обозначается класс функций из $C^k(\Omega)$, допускающих вместе со всеми частными производными до k -го порядка включительно непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$; через $C_0^k(\Omega)$, $k = 0, 1, \dots$, обозначается класс функций из $C^k(\Omega)$, имеющих компактный носитель, содержащийся в Ω . Положим

$$C^\infty(\Omega) \equiv \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega), \quad C^\infty(\overline{\Omega}) \equiv \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}), \quad D(\Omega) \equiv C_0^\infty(\Omega) \equiv \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega),$$

$D(\overline{\Omega})$ - класс функций из $C^\infty(\Omega)$, допускающих непрерывное продолжение до функций из $D(R^n)$.

Все определенные выше пространства гладких функций являются векторными пространствами над полем действительных чисел.

Множества $D(\Omega)$, $\{D(\Omega)\}^m$ называются пространствами пробных (основных) функций. Последовательность $\{j_k\}_{k=1}^\infty$ функций $j_k \in D(\Omega)$ сходится к 0 в $D(\Omega)$, если существует компактное подмножество $K \subset \Omega$, такое, что $\operatorname{supp} j_k \subset K$ при всех $k = 1, 2, \dots$ и для любого мультииндекса a $\sup |\partial^a j_k| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Последовательность $\{j_k\}_{k=1}^\infty$, $j_k \in D(\Omega)$, сходится к $j \in D(\Omega)$, если последовательность $\{j_k - j\}_{k=1}^\infty$ сходится к 0 в $D(\Omega)$. Будем говорить, что последовательность $\{\vec{j}_k\}_{k=1}^\infty$ функций

$\mathbf{j}_k = \{j_1^k, j_2^k, \dots, j_m^k\} \in \{D(\Omega)\}^m$ сходится к $\mathbf{j} \in \{D(\Omega)\}^m$, если для каждого $i = 1, \dots, m$ последовательность $\{j_i^k\}_{k=1}^\infty$ сходится к $j_i \in D(\Omega)$ ([21]).

Элементами пространства $L_p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) являются классы измеримых по Лебегу эквивалентных (совпадающих при почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$) функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, абсолютно интегрируемых по мере Лебега $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ со степенью p ; $L_p(\Omega)$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p}.$$

Элементами пространства $L_\infty(\Omega)$ являются классы измеримых по Лебегу эквивалентных функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, существенно ограниченных в Ω ; $L_\infty(\Omega)$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \text{vraisup} |u(\mathbf{x})|.$$

При $p = 2$ пространство $L_p(\Omega) = L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_{2,\Omega} = \int_{\Omega} uv d\mathbf{x},$$

причем $\|u\|_{2,\Omega} = (u, u)_{2,\Omega}^{1/2} = \left\{ \int_{\Omega} u^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$

При $1 < p < \infty$ банаховы пространства $L_p(\Omega)$ рефлексивны, при $1 \leq p < \infty$ – сепарабельны и слабо полны.

Элементами пространства $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, ($L_{\infty,\text{loc}}(\Omega)$), являются классы эквивалентных измеримых функций, суммируемых со степенью p (существенно ограниченных) на каждом компактном подмножестве $K \subset \Omega$.

Пространства $\{L_p(\Omega)\}_p^m$, $1 \leq p \leq \infty$, являются банаховыми пространствами с соответствующими нормами

$$\|\mathbf{u}\|_{p,\Omega} = \begin{cases} \left\{ \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{vraisup} |\mathbf{u}|, & p = \infty, \end{cases}$$

где $|\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2)^{1/2}.$

При $p = 2$ пространство $\{L_2(\Omega)\}^m$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{2,\Omega} = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_i v_i d\mathbf{x},$$

причем $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{2,\Omega}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_i^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$

Множество $D(\Omega)$ плотно в пространстве $L_p(\Omega)$ при $1 \leq p < \infty$.

Лемма 1.12. (Неравенство Гельдера). Если p, q – сопряженные показатели, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$, то $uv \in L_1(\Omega)$ и справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} |uv| d\mathbf{x} \leq \|u\|_{p,\Omega} \|v\|_{q,\Omega}.$$

Лемма 1.13. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, q – сопряженный к p показатель. Для всех $\mathbf{u} \in \{L_p(\Omega)\}^m$, $\mathbf{v} \in \{L_q(\Omega)\}^m$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} \right| \leq \|\mathbf{u}\|_{p,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{q,\Omega}.$$

Распределением (обобщенной функцией) называется линейный непрерывный функционал, определенный на $D(\Omega)$. Пространство обобщенных функций обозначается через $D'(\Omega)$.

Любая функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ определяет распределение $f_u(j) = \int_{\Omega} u j d\mathbf{x}$, $j \in D(\Omega)$.

Локально интегрируемые функции u и v такие, что $f_u(j) = f_v(j)$ для всех $j \in D(\Omega)$, эквивалентны. Обратно, эквивалентные функции определяют одинаковые распределения. Можно, таким образом, отождествить каждую локально интегрируемую функцию с отвечающей ее обобщенной функцией. Поэтому говорят, что распределение $f \in D'(\Omega)$ – функция класса L , если найдется функция $u \in L$ такая, что $f = f_u$.

Для любого распределения $u \in D'(\Omega)$ и произвольного мультииндекса a определена производная $\partial^a u$ как обобщенная функция, действующая по правилу

$$\langle \partial^a u, j \rangle = (-1)^{|a|} \langle u, \partial^a j \rangle, \quad j \in D(\Omega).$$

Лемма 1.14. (Характеризация градиента распределения). Пусть $\Omega \subset R^n$ - открытое множество, $\dot{f} \in \{D'(\Omega)\}^n$. Для того, чтобы $\dot{f} = \text{grad } p$ при некотором $p \in D'(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle \dot{f}, \dot{v} \rangle = 0$ для всех $\dot{v} \in \{D(\Omega)\}^n$ таких, что $\text{div } \dot{v} = 0$.

Лемма 1.15. Если $\Omega \subset R^n$ - область, и для некоторого $u \in D'(\Omega)$ при $k = 1, \dots, n$ $\partial_k u = 0$, то u равна постоянной функции в Ω .

Пусть a - произвольный мультииндекс. Для функции $u \in L_p(\Omega)$ будем говорить, что $\partial^a u = g \in L_q(\Omega)$, если при всех $j \in D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} g j d\mathbf{x} = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} u \partial^a j d\mathbf{x}.$$

Через $W^{k,p}(\Omega)$ ($k \geq 0$ целое, $1 \leq p < \infty$) обозначаются пространства Соболева функций $u \in L_p(\Omega)$, все производные $\partial^a u$ которых порядка $|a| \leq k$ суммируемы со степенью p . Это пространства Банаха относительно нормы

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|a| \leq k} \|\partial^a u\|_{p,\Omega}^p \right\}^{1/p}. \quad (1.8)$$

При $1 \leq p < \infty$ пространства $W^{k,p}(\Omega)$ сепарабельны, при $1 < p < \infty$ рефлексивны. При $p = 2$ соответствующие пространства $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ гильбертовы относительно скалярного произведения

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|a| \leq k} (\partial^a u, \partial^a v)_{2,\Omega}. \quad (1.9)$$

Через $W_0^{k,p}(\Omega)$ обозначается замыкание множества $D(\Omega)$ по норме (1.8). Соответственно, $H_0^k(\Omega)$ - замыкание $D(\Omega)$ относительно нормы, порожденной скалярным произведением (1.9).

Лемма 1.16 (неравенство Фридрихса). Если $\Omega \subset R^n$ - открытое ограниченное множество, то для каждого мультииндекса b , $0 \leq |b| \leq k$ и для каждого $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |\partial^b u|^p d\mathbf{x} \leq C \sum_{|a|=k} \int_{\Omega} |\partial^a u|^p d\mathbf{x},$$

где C - постоянная, зависящая только от Ω , b , p , k .

Следствие. Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область. Тогда формула

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left(\sum_{|a|=k} |\partial^a u|^2 \right)^{p/2} d\mathbf{x} \right\}^{1/p}$$

определяет в $W_0^{k,p}(\Omega)$ норму, эквивалентную норме (1.8). Соответственно при $p = 2$ норма, определяемая в $H_0^k(\Omega)$ скалярным произведением

$$(u, v)_{H_0^k(\Omega)} = \sum_{|a|=k} (\partial^a u, \partial^a v)_{2,\Omega},$$

эквивалентна норме, задаваемой скалярным произведением (1.9). В частности, при $k = 1$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\text{grad } u\|_{2,\Omega}.$$

Обозначим через $H^{-1}(\Omega)$ пространство, сопряженное к $H_0^1(\Omega)$.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область класса $C^{0,1}$. Можно естественным образом определить $(n-1)$ -мерную лебегову поверхностную меру dg . Через $L_p(\partial\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, обозначается множество классов эквивалентных относительно $(n-1)$ -мерной лебеговой поверхностной меры функций $u : \partial\Omega \rightarrow R^1$, для которых $\int_{\partial\Omega} |u(\mathbf{x})|^p dg < \infty$.

Утверждения следующих теорем о следах установлены, например, в [83].

Теорема 1.5. Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область класса $C^{0,1}$, $p > 1$. Тогда существует линейный непрерывный оператор $g_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\partial\Omega)$ (оператор следа) такой, что $g_0 u = u|_{\partial\Omega}$ для всех $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Ядро оператора g_0 совпадает с пространством $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Теорема 1.6. Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область класса C^2 . Тогда $g_0(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ - плотное подпространство в $L_2(\partial\Omega)$ и может быть снабжено нормой, индуцированной из $H^1(\Omega)$ с помощью g_0 , то есть $\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}$, где функция $u \in H^1(\Omega)$ такова, что $g_0 u = v$. Существует линейный непрерывный оператор $l_{\Omega} : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$, называемый оператором поднятия, такой, что $g_0 \circ l_{\Omega}$ - тождественный оператор в $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Лемма 1.17. (Неравенство Пуанкаре). Пусть $\Omega \subset R^n$ - открытая ограниченная область класса $C^{0,1}$. Найдется такая величина $T(\Omega) > 0$, зависящая только от n и Ω , что для всех $u \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x} \leq T(\Omega) \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} u d\mathbf{x} \right)^2.$$

Лемма 1.18. (Обобщенное неравенство Пуанкаре, [84]) Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область класса $C^{0,1}$, $p > 1$. Существует такая постоянная $A(p, \Omega) > 0$, зависящая только от Ω , p , n , что для каждой функции $u \in D'(\Omega)$, у которой $\text{grad } u \in \{L_p(\Omega)\}^n$, найдется такое число C^* , что

$$\|u - C^*\|_{p, \Omega} \leq A(p, \Omega) \|\text{grad } u\|_{p, \Omega}. \quad (1.10)$$

При $p = 2$ в качестве C^* можно взять минимизирующее левую часть (1.13) число $1/\text{mes}(\Omega) \int_{\Omega} u d\mathbf{x}$. Тогда придем к неравенству Пуанкаре, где $T(\Omega) = (A(2, \Omega))^2$.

Если $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей, то для каждой функции $\mathbf{u} \in \{C^1(\overline{\Omega})\}^n$ справедлива формула Гаусса - Остроградского (Стокса)

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dg. \quad (1.11)$$

Используя тождества (1.4), (1.5) и формулу (1.11), будем говорить, что для функции $\mathbf{u} \in \{L_1(\Omega)\}^3$ $\text{div } \mathbf{u} = g \in L_p(\Omega)$, если

$$\int_{\Omega} g j d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\text{grad } j \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \text{ при всех } j \in D(\Omega),$$

$\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{h} \in \{L_p(\Omega)\}^3$, если

$$\int_{\Omega} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \text{ при всех } \mathbf{y} \in \{D(\Omega)\}^3,$$

Пусть $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset R^3$ - некоторая область. Определим следующие пространства вектор-функций:

$$H_p(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3 : \text{div } \mathbf{u} \in L_p(\Omega)\},$$

$$H_p(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3 : \text{rot } \mathbf{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3\}.$$

В случае $p = 2$ эти пространства рассматривались, в частности, в [34], [138].

Лемма 1.19. $H_p(\text{div}; \Omega)$, $H_p(\text{rot}; \Omega)$ - банаховы пространства с соответствующими нормами

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{p, \text{div}, \Omega} &= \left\{ \|\mathbf{u}\|_{p, \Omega}^p + \|\text{div } \mathbf{u}\|_{p, \Omega}^p \right\}^{1/p}, \\ \|\mathbf{u}\|_{p, \text{rot}, \Omega} &= \left\{ \|\mathbf{u}\|_{p, \Omega}^p + \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{p, \Omega}^p \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Через $H_p^0(\text{div}; \Omega)$, $H_p^0(\text{rot}; \Omega)$ обозначаем замыкание множества $\{\mathbf{D}(\Omega)\}^3$ в $H_p(\text{div}; \Omega)$ и в $H_p(\text{rot}; \Omega)$ соответственно.

Теорема 1.7. Пусть $\Omega \subset R^3$ - открытая, ограниченная, локально-звездная область. Тогда множество вектор-функций, принадлежащих $\{\mathbf{D}(\overline{\Omega})\}^3$, плотно в пространстве $H_p(\text{div}; \Omega)$ и в $H_p(\text{rot}; \Omega)$.

В случае $p = 2$ для пространства $H_2(\text{div}; \Omega)$ утверждение теоремы было доказано в [138], для пространства $H_2(\text{rot}; \Omega)$ - в [34]. В общем случае теорема может быть доказана по аналогии.

Лемма 1.20. Пространства $H_p(\text{div}; \Omega)$, $H_p(\text{rot}; \Omega)$, $1 \leq p < \infty$, сепарабельны.

Пусть $p = 2$, $\Omega \subset R^3$ - произвольная область. Обозначаем $H(\text{div}; \Omega) = H_2(\text{div}; \Omega)$, $H(\text{rot}; \Omega) = H_2(\text{rot}; \Omega)$, $H_0(\text{div}; \Omega) = H_2^0(\text{div}; \Omega)$, $H_0(\text{rot}; \Omega) = H_2^0(\text{rot}; \Omega)$.

Через $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ обозначим пространство, сопряженное к $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Так как $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L_2(\partial\Omega)$, причем вложение непрерывно, то пространство $L_2(\partial\Omega)$ непрерывно вложено в $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Теорема 1.8. ([138]) Пусть $\Omega \subset R^n$ - открытое ограниченное множество класса C^2 . Тогда существует непрерывный линейный оператор $g_n : H(\text{div}; \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ такой, что $g_n \mathbf{u} = u_n$ для всех $\mathbf{u} \in \{C^1(\overline{\Omega})\}^n$. Для всех $\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega)$ и $w \in H^1(\Omega)$ верна обобщенная формула Стокса

$$\langle g_n \mathbf{u}, g_0 w \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } w) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} w \text{div } \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (1.13)$$

Ядро оператора g_n совпадает с $H_0(\text{div}; \Omega)$, то есть

$$H_0(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega) : u_n = 0\}.$$

Теорема 1.9. ([34]) Пусть $\Omega \subset R^3$ - открытое ограниченное множество класса C^2 . Тогда существует непрерывный линейный оператор $g_t : H(\text{rot}; \Omega) \rightarrow \{H^{-1/2}(\partial\Omega)\}^3$ такой, что $g_t \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ для всех $\mathbf{u} \in \{C^1(\overline{\Omega})\}^3$. Для всех $\mathbf{u} \in H(\text{rot}; \Omega)$ и $\mathbf{w} \in \{H^1(\Omega)\}^3$ верна формула

$$\langle g_t \mathbf{u}, g_0 \mathbf{w} \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{w}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \text{rot } \mathbf{u}) d\mathbf{x}. \quad (1.14)$$

Ядро оператора g_t совпадает с $H_0(\text{rot}; \Omega)$, то есть

$$H_0(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0\}.$$

Лемма 1.21. Для всех $\mathbf{\bar{u}} \in H_0(\text{div}; \Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{\bar{u}} \cdot \text{grad } p) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{\bar{u}} d\mathbf{x}.$$

Лемма 1.22. Для всех $\mathbf{\bar{u}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\mathbf{\bar{v}} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{\bar{u}} \cdot \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{\bar{v}} \cdot \mathbf{\bar{u}}) d\mathbf{x}.$$

В пространствах $H(\text{div}; \Omega)$ и $H(\text{rot}; \Omega)$ рассмотрим множества функций

$$K(\text{div}, \Omega) = \{ \mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \text{div } \mathbf{\bar{u}} = 0 \}$$

$$K(\text{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^n : \text{rot } \mathbf{\bar{u}} = 0 \}.$$

$K(\text{div}; \Omega)$, $K(\text{rot}; \Omega)$ - замкнутые подпространства в $H(\text{div}; \Omega)$, $H(\text{rot}; \Omega)$ соответственно, поэтому являются гильбертовыми пространствами относительно скалярных произведений

$$(\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}})_{K(\text{div}, \Omega)} = (\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}})_{2, \Omega}, \quad (\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}})_{K(\text{rot}, \Omega)} = (\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}})_{2, \Omega}.$$

Через $K^\perp(\text{div}, \Omega)$ обозначаем ортогональное дополнение к $K(\text{div}, \Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^n$, через $K^\perp(\text{rot}, \Omega)$ - ортогональное дополнение к $K(\text{rot}, \Omega)$ в $\{L_2(\Omega)\}^2$ или в $\{L_2(\Omega)\}^3$ соответственно.

Лемма 1.23. Функция $\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ лежит в $K(\text{div}; \Omega)$ тогда и только тогда, когда $\int_{\Omega} (\mathbf{\bar{u}} \cdot \text{grad } j) d\mathbf{x} = 0$ при всех $j \in H_0^1(\Omega)$.

Лемма 1.24. Для любой функции $\mathbf{\bar{u}} \in K(\text{div}, \Omega)$ найдется такая функция $\mathbf{\bar{h}} \in H(\text{rot}, \Omega)$, что $\mathbf{\bar{u}} = \text{rot } \mathbf{\bar{h}}$.

Лемма 1.25. Функция $\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ лежит в $K(\text{rot}; \Omega)$ тогда и только тогда, когда $\int_{\Omega} (\mathbf{\bar{u}} \cdot \text{rot } \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} = 0$ при всех $\mathbf{\bar{v}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Лемма 1.26. Для любой функции $\mathbf{\bar{u}} \in K(\text{rot}; \Omega)$ найдется такая функция $w \in H^1(\Omega)$, что $\mathbf{\bar{u}} = \text{grad } w$.

Лемма 1.27. Для всех $p \in H^1(\Omega)$ справедливо включение $\text{grad } p \in K(\text{rot}, \Omega)$, причем если $p \in H_0^1(\Omega)$, то $\text{grad } p \in K(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Доказательство лемм 1.24, 1.30 приводится, например, в [51]. Леммы 1.27, 1.29 – следствие представлений из приложения.

Лемма 1.28. $K^\perp(\text{rot}; \Omega)$ совпадает с замыканием в $\{L_2(\Omega)\}^3$ множества

$$X = \{\operatorname{rot} \mathbf{j} : \mathbf{j} \in \{D(\Omega)\}^3\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{j} \in \{D(\Omega)\}^3$, $\mathbf{v} \in K(\operatorname{rot}, \Omega)$, тогда, по определению, $\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{j}) d\mathbf{x} = 0$, то есть $\operatorname{rot} \mathbf{j} \in K^{\perp}(\operatorname{rot}; \Omega)$. Так как $K^{\perp}(\operatorname{rot}; \Omega)$ - замкнутое подпространство в $\{L_2(\Omega)\}^3$, $\bar{X} \subset K^{\perp}(\operatorname{rot}; \Omega)$.

Обратно, предположим, что $\bar{X}$ - собственное подпространство в $K^{\perp}(\operatorname{rot}; \Omega)$. Тогда найдется ненулевой элемент $\bar{\mathbf{z}} \in K^{\perp}(\operatorname{rot}; \Omega)$, ортогональный $\bar{X}$. В частности, $\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{z}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{j}) d\mathbf{x} = 0$ для всех $\mathbf{j} \in \{D(\Omega)\}^3$, то есть $\bar{\mathbf{z}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ и, следовательно, $\bar{\mathbf{z}} = 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 1.29. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда

$$K^{\perp}(\operatorname{rot}, \Omega) = K(\operatorname{div}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in K^{\perp}(\operatorname{rot}, \Omega)$. Согласно лемме 1.28, найдется последовательность $\{\mathbf{j}_m\} \in \{D(\Omega)\}^3$ такая, что $\|\mathbf{u} - \operatorname{rot} \mathbf{j}_m\|_{2, \Omega} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Так как при каждом m $\operatorname{rot} \mathbf{j}_m \in \{D(\Omega)\}^3$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{j}_m = 0$, то для всех $\mathbf{y} \in D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} \mathbf{y} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{j}_m) d\mathbf{x} = 0,$$

то есть, по определению, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, последовательность $\{\operatorname{rot} \mathbf{j}_m\}$ сходится к $\mathbf{u}$ в $H(\operatorname{div}; \Omega)$. Таким образом, $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap K(\operatorname{div}; \Omega)$.

Обратно, пусть $\mathbf{u} \in K(\operatorname{div}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$, $\mathbf{v}$ - произвольный элемент из $K(\operatorname{rot}, \Omega)$. Тогда из неравенства (п.15) следует, что $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0$, то есть $\mathbf{u} \in K^{\perp}(\operatorname{rot}, \Omega)$.

Лемма 1.30. $K^{\perp}(\operatorname{div}; \Omega)$ совпадает с замыканием в $\{L_2(\Omega)\}^3$ множества

$$Y = \{\operatorname{grad} j : j \in D(\Omega)\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.28.

Лемма 1.31. Замыкание в $\{L_2(\Omega)\}^3$ множества $Y = \{\operatorname{grad} j : j \in D(\Omega)\}$ совпадает со множеством

$$\{\operatorname{grad} j : j \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Доказательство. Очевидно, $Y \subset \{\text{grad } j : j \in H_0^1(\Omega)\}$. Если $\mathbf{\bar{u}} \in \bar{Y}$, то найдется последовательность $\{j_k\} \in D(\Omega)$ такая, что $\|\mathbf{\bar{u}} - \text{grad } j_k\|_{2,\Omega} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Согласно неравенству Фридрихса, последовательность $\{j_k\}$ сходится в $H^1(\Omega)$ к некоторому элементу $j \in H_0^1(\Omega)$ и при этом $\mathbf{\bar{u}} = \text{grad } j$. Обратно, пусть $j \in H_0^1(\Omega)$. Тогда найдется последовательность $\{j_k\} \in D(\Omega)$ такая, что $\|\text{grad}(j_k - j)\|_{2,\Omega} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то есть $\text{grad } j \in \bar{Y}$.

Лемма 1.32. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область, звездная относительно некоторой точки. Тогда

$$K^\perp(\text{div}, \Omega) = K(\text{rot}, \Omega) \mathbf{I} H_0(\text{rot}; \Omega).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{\bar{u}} \in K^\perp(\text{div}, \Omega)$. Согласно лемме 1.31, $\mathbf{\bar{u}} = \text{grad } j$, где $j \in H_0^1(\Omega)$. По лемме 1.27 тогда $\mathbf{\bar{u}} \in K(\text{rot}, \Omega) \mathbf{I} H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Обратно, пусть $\mathbf{\bar{u}} \in K(\text{rot}, \Omega) \mathbf{I} H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\mathbf{\bar{v}}$ - произвольный элемент из $K(\text{div}, \Omega)$. Из неравенства (п.17) следует, что $\int_{\Omega} (\mathbf{\bar{u}} \cdot \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} = 0$, то есть $\mathbf{\bar{u}} \in K^\perp(\text{div}, \Omega)$.

Следующий результат был установлен другими методами, например, в [19], [138].

Теорема 1.10. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область класса C^2 , звездная относительно некоторой точки. Тогда пространство $\{L_2(\Omega)\}^3$ раскладывается в прямую сумму взаимно ортогональных пространств H, H_1, H_2 , где

$$\begin{aligned} H &= \{\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \text{div } \mathbf{\bar{u}} = 0, g_n \mathbf{\bar{u}} = 0\}, \\ H_1 &= \{\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mathbf{\bar{u}} = \text{grad } p, \Delta p = 0\}, \\ H_2 &= \{\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mathbf{\bar{u}} = \text{grad } j, j \in H_0^1(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.29, $H = K(\text{div}, \Omega) \mathbf{I} H_0(\text{div}; \Omega) = K^\perp(\text{rot}, \Omega)$, по леммам 1.32 и 1.34 $H_2 = K(\text{rot}, \Omega) \mathbf{I} H_0(\text{rot}; \Omega) = K^\perp(\text{div}, \Omega)$. Так как, ввиду лемм 1.26, 1.27, $H_1 = K(\text{div}, \Omega) \mathbf{I} K(\text{rot}, \Omega)$, пространства H, H_1, H_2 взаимно ортогональны. Остается показать, что пространство $K(\text{rot}; \Omega)$ раскладывается в прямую сумму H_1 и H_2 . Если $\mathbf{\bar{u}} \in K(\text{rot}; \Omega)$, то, согласно лемме Лакса-Мильграма, найдется единственный элемент $j \in H_0^1(\Omega)$ такой, что при всех $h \in H_0^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (\mathbf{\bar{u}} \cdot \text{grad } h) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\text{grad } j \cdot \text{grad } h) d\mathbf{x},$$

и, следовательно, $\mathbf{\bar{u}} - \text{grad } j \in K(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{div}; \Omega) = H_1$. Так как $\text{grad } j \in H_1$, теорема доказана.

Пусть $h : \{L_2(\Omega)\}^3 \rightarrow \{L_2(\Omega)\}^3$ - самосопряженный линейный оператор, удовлетворяющий при всех $\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ условию

$$h_1 \|\mathbf{\bar{u}}\|_{2,\Omega}^2 \leq (h\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{u}})_{2,\Omega} \leq h_2 \|\mathbf{\bar{u}}\|_{2,\Omega}^2, \quad (1.15)$$

h_1, h_2 - не зависящие от $\mathbf{\bar{u}}$ положительные постоянные.

Лемма 1.33. Пусть h^{-1} - обратный к h оператор. Тогда для всех $\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$

$$h_1 \|\mathbf{\bar{u}}\|_{2,\Omega} \leq \|h\mathbf{\bar{u}}\|_{2,\Omega} \leq h_2 \|\mathbf{\bar{u}}\|_{2,\Omega}, \quad (1.16)$$

$$\frac{1}{h_2} \|\mathbf{\bar{u}}\|_{2,\Omega}^2 \leq (h^{-1}\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{u}})_{2,\Omega} \leq \frac{1}{h_1} \|\mathbf{\bar{u}}\|_{2,\Omega}^2. \quad (1.17)$$

Введем в пространстве $\{L_2(\Omega)\}^3$ скалярное произведение формулой $(\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}})_h = \int_{\Omega} (h\mathbf{\bar{u}} \cdot \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x}$.

Ввиду (1.15), норма, порождаемая скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_h$, эквивалентна норме $\|\cdot\|_{2,\Omega}$. Получившееся гильбертово пространство обозначим через $L_h(\Omega)$.

Определим далее следующие пространства вектор-функций:

$$H(\text{div } h; \Omega) = \{\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : h\mathbf{\bar{u}} \in H(\text{div}; \Omega)\},$$

$$H_0(\text{div } h; \Omega) = \{\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : h\mathbf{\bar{u}} \in H_0(\text{div}; \Omega)\},$$

$$K(\text{div } h; \Omega) = \{\mathbf{\bar{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : h\mathbf{\bar{u}} \in K(\text{div}; \Omega)\},$$

$$K_0(\text{div } h; \Omega) = K(\text{div } h; \Omega) \cap H_0(\text{div } h; \Omega),$$

$$W(\text{div } h; \Omega) = H(\text{div } h; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega),$$

$$W_0(\text{div } h; \Omega) = H_0(\text{div } h; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega),$$

$$W^0(\text{div } h; \Omega) = H(\text{div } h; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega),$$

$$V(\text{div } h; \Omega) = W(\text{div } h; \Omega) \cap K(\text{div } h; \Omega),$$

$$V_0(\text{div } h; \Omega) = W_0(\text{div } h; \Omega) \cap K(\text{div } h; \Omega),$$

$$V^0(\text{div } h; \Omega) = W^0(\text{div } h; \Omega) \cap K(\text{div } h; \Omega).$$

Лемма 1.34. $H(\text{div } h; \Omega)$, $W(\text{div } h; \Omega)$ - пространства Гильберта с соответствующими скалярными произведениями

$$(\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}})_{\text{div } h} = \int_{\Omega} (\mathbf{\bar{u}} \cdot \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \text{div } h\mathbf{\bar{u}} \text{div } h\mathbf{\bar{v}} d\mathbf{x},$$

$$(\mathbf{\dot{u}}, \mathbf{\dot{v}})_w = \int_{\Omega} (\mathbf{\dot{u}} \cdot \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{\dot{u}} \cdot \text{rot } \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \text{div } h \mathbf{\dot{u}} \text{div } h \mathbf{\dot{v}} d\mathbf{x}.$$

Так как $H_0(\text{div } h; \Omega)$, $K(\text{div } h; \Omega)$, $K_0(\text{div } h; \Omega)$ - замкнутые подпространства в $H(\text{div } h; \Omega)$, а $W_0(\text{div } h; \Omega)$, $W^0(\text{div } h; \Omega)$, $V(\text{div } h; \Omega)$, $V_0(\text{div } h; \Omega)$, $V^0(\text{div } h; \Omega)$ - замкнутые подпространства в $W(\text{div } h; \Omega)$, они являются гильбертовыми пространствами относительно скалярных произведений, индуцированных, соответственно, из $H(\text{div } h; \Omega)$ и $W(\text{div } h; \Omega)$. В частности, для всех $\mathbf{\dot{u}}, \mathbf{\dot{v}} \in V(\text{div } h; \Omega)$

$$(\mathbf{\dot{u}}, \mathbf{\dot{v}})_v = (\mathbf{\dot{u}}, \mathbf{\dot{v}})_w = \int_{\Omega} (\mathbf{\dot{u}} \cdot \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{\dot{u}} \cdot \text{rot } \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x} = (\mathbf{\dot{u}}, \mathbf{\dot{v}})_{2, \text{rot}, \Omega}.$$

Лемма 1.35. Пространство $H(\text{div } h; \Omega)$ сепарабельно.

Следствие. Пространства $H_0(\text{div } h; \Omega)$, $K(\text{div } h; \Omega)$, $K_0(\text{div } h; \Omega)$ сепарабельны.

Справедливость лемм 1.34, 1.35 устанавливается на основании свойств пространства $H(\text{div}; \Omega)$ и леммы 1.33.

Лемма 1.36. Для любого элемента $\mathbf{\dot{w}} \in W^0(\text{div } h; \Omega)$ однозначно определены элементы $\mathbf{\dot{v}} \in V^0(\text{div } h; \Omega)$, $j \in H_0^1(\Omega)$ такие, что $\mathbf{\dot{w}} = \mathbf{\dot{v}} + \text{grad } j$.

Доказательство. Используя лемму Лакса-Мильграма, можно доказать, что существует единственная функция $j \in H_0^1(\Omega)$ такая, что при всех $w \in H_0^1(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} (h \text{grad } j \cdot \text{grad } w) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (h \mathbf{\dot{w}} \cdot \text{grad } w) d\mathbf{x}. \quad (1.18)$$

Положим $\mathbf{\dot{v}} = \mathbf{\dot{w}} - \text{grad } j$. Тогда $\text{div } \eta \mathbf{\dot{v}} = 0$ и, согласно лемме 1.27, $\mathbf{\dot{v}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, то есть $\mathbf{\dot{v}} \in V^0(\text{div } h; \Omega)$.

Допустим, $\mathbf{\dot{w}} = \mathbf{\dot{v}}_1 + \text{grad } j_1$, где $\mathbf{\dot{v}}_1 \in V^0(\text{div } h; \Omega)$, $j_1 \in H_0^1(\Omega)$. Тогда, так как $\mathbf{\dot{v}} - \mathbf{\dot{v}}_1 \in V^0(\text{div } h; \Omega)$, для всех $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (m \text{grad}(j_1 - j) \cdot \text{grad } w) d\mathbf{x} = 0,$$

и, следовательно, $j_1 = j$, $\mathbf{\dot{v}}_1 = \mathbf{\dot{v}}$.

Лемма 1.37. Каждый элемент $\mathbf{\dot{w}} \in W_0(\text{div } h; \Omega)$ однозначно представим в виде $\mathbf{\dot{w}} = \mathbf{\dot{v}} + \mathbf{\dot{g}}$, где $\mathbf{\dot{v}} \in V_0(\text{div } h; \Omega)$, $\mathbf{\dot{g}} \in K(\text{rot}, \Omega)$.

Доказательство. Предположим, $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{g} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{g}_1$, где $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \in V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$, $\mathbf{g}, \mathbf{g}_1 \in K(\operatorname{rot}, \Omega)$. Тогда $\mathbf{g} - \mathbf{g}_1 \in V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$, то есть по лемме 1.29, $h(\mathbf{g} - \mathbf{g}_1) \in K^\perp(\operatorname{rot}, \Omega)$ и, следовательно, $\int_{\Omega} (h(\mathbf{g} - \mathbf{g}_1) \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}_1)) d\mathbf{x} = 0$. Таким образом, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$.

Используя лемму Лакса-Мильграма, утверждаем, что найдется единственный элемент $\mathbf{g} \in K(\operatorname{rot}, \Omega)$, удовлетворяющий при всех $\mathbf{h} \in K(\operatorname{rot}, \Omega)$ равенству

$$\int_{\Omega} (h\mathbf{g} \cdot \mathbf{h}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (h\mathbf{w} \cdot \mathbf{h}) d\mathbf{x}. \quad (1.19)$$

Оно означает ввиду леммы 1.29, что $h(\mathbf{w} - \mathbf{g}) \in H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap K(\operatorname{div}; \Omega)$, поэтому $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{g} \in V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ и лемма доказана.

Лемма 1.38. $K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$ - ортогональное дополнение в $L_h(\Omega)$ к $K(\operatorname{div} h; \Omega)$ - совпадает со множеством $\{\operatorname{grad} p : p \in H_0^1(\Omega)\}$.

Доказательство. По определению, $\mathbf{v} \in K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} \in L_h(\Omega)$ и $\int_{\Omega} (h\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = 0$ для всех $\mathbf{u} \in K(\operatorname{div} h; \Omega)$, то есть $\mathbf{v}$ принадлежит ортогональному дополнению в $\{L_2(\Omega)\}^3$ ко множеству $hK(\operatorname{div} h; \Omega) = \{h\mathbf{u} : \mathbf{u} \in K(\operatorname{div} h; \Omega)\}$. Так как оператор h обратим, $hK(\operatorname{div} h; \Omega) = K(\operatorname{div}; \Omega)$ и утверждение следует из леммы 1.31.

Лемма 1.39. $K_0^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$ - ортогональное дополнение в $L_h(\Omega)$ к $K_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ - совпадает со множеством $K(\operatorname{rot}; \Omega)$.

Доказательство. Элемент $\mathbf{v} \in L_h(\Omega)$ лежит в $K_0^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$ тогда и только тогда, когда он принадлежит ортогональному дополнению в $\{L_2(\Omega)\}^3$ к множеству $hK_0(\operatorname{div} h; \Omega)$, совпадающему, ввиду леммы 1.29, с $K^\perp(\operatorname{rot}; \Omega)$.

Пространства $V^0(\operatorname{div} h; \Omega)$, $V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ сепарабельны как подпространства в $K(\operatorname{div} h; \Omega)$, $W^0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$ и $W_0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$ - как подпространства в $K(\operatorname{rot}; \Omega)$, следовательно, пространства $W^0(\operatorname{div} h; \Omega)$, $W_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ также сепарабельны.

Согласно (1.15), $\|\mathbf{u}\|_h = \left(\int_{\Omega} (h\mathbf{u}, \mathbf{u}) d\mathbf{x} \right)^{1/2} \leq \sqrt{h_2} \|\mathbf{u}\|_{2, \Omega} \leq \sqrt{h_2} \|\mathbf{u}\|_w$, то есть пространство

$W(\operatorname{div} h; \Omega)$ непрерывно вложено в $L_h(\Omega)$. Отсюда получаем также, что множества $K(\operatorname{div} h; \Omega)$, $K_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ можно рассматривать как замкнутые подпространства в $L_h(\Omega)$.

Лемма 1.40. Пространство $V^0(\operatorname{div} h; \Omega)$ плотно и непрерывно вложено в $K(\operatorname{div} h; \Omega)$.

Доказательство. Пусть $\int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0$ для всех $\mathbf{v} \in V^0(\operatorname{div} h; \Omega)$ и некоторого $\mathbf{u} \in K(\operatorname{div} h; \Omega)$. Для любой функции $\mathbf{w} \in \{D(\Omega)\}^3$, согласно лемме Лакса-Мильграма, найдется единственный элемент $j \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий при всех $w \in H_0^1(\Omega)$ тождеству (1.18). Тогда $\mathbf{w} - \operatorname{grad} j \in V^0(\operatorname{div} h; \Omega)$ и, следовательно, $\int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} j) d\mathbf{x} = 0$ по лемме 1.38. Так как множество $\{D(\Omega)\}^3$ плотно в $\{L_2(\Omega)\}^3$, $\mathbf{u} = 0$ и лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 1.41. Пространство $V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ плотно и непрерывно вложено в $K_0(\operatorname{div} h; \Omega)$.

Лемма 1.42. Пространство $W^0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$ плотно и непрерывно вложено в пространство $K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$.

Доказательство. Пусть $\int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0$ для всех $\mathbf{v} \in W^0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$ и некоторого $\mathbf{u} \in K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$. Для любой функции $\mathbf{w} \in \{D(\Omega)\}^3$, согласно лемме Лакса-Мильграма, найдется единственный элемент $j \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий при всех $w \in H_0^1(\Omega)$ тождеству

$$\int_{\Omega} (h \operatorname{grad} j \cdot \operatorname{grad} w) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} w) d\mathbf{x}.$$

Тогда $\operatorname{div} h \operatorname{grad} j = \operatorname{div} \mathbf{w}$, $\operatorname{grad} j \in W^0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$, $m^{-1} \mathbf{w} - \operatorname{grad} j \in K(\operatorname{div} h; \Omega)$ и, следовательно, $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot h^{-1} \mathbf{w}) d\mathbf{x} = 0$. Так как множество $\{D(\Omega)\}^3$ плотно в $\{L_2(\Omega)\}^3$, лемма доказана.

Лемма 1.43. Пространство $W_0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$ плотно и непрерывно вложено в пространство $K(\operatorname{rot}; \Omega)$.

Доказательство. Пусть $\int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0$ для всех $\mathbf{v} \in W_0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$ и некоторого $\mathbf{u} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$. Для любой функции $\mathbf{w} \in \{D(\Omega)\}^3$, согласно лемме Лакса-Мильграма, найдется единственный элемент $\mathbf{g} \in K(\operatorname{rot}, \Omega)$, удовлетворяющий при всех $\mathbf{h} \in K(\operatorname{rot}, \Omega)$ тождеству

$$\int_{\Omega} (h \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{h}) d\mathbf{x}.$$

Тогда $\mathbf{g} \in W_0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$, $h^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{g} \in K_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ и, следовательно, $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot h^{-1} \mathbf{w}) d\mathbf{x} = 0$. Так как множество $\{D(\Omega)\}^3$ плотно в $\{L_2(\Omega)\}^3$, лемма доказана.

Поскольку, согласно лемме 1.36, $W^0(\operatorname{div} h; \Omega)$ раскладывается в прямую сумму $V^0(\operatorname{div} h; \Omega)$ и $W^0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K^\perp(\operatorname{div} h; \Omega)$, а $W_0(\operatorname{div} h; \Omega)$, согласно лемме 1.37, раскладывается в прямую сумму $V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ и $W_0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$, из лемм 1.40-1.43 следует, что пространства $W^0(\operatorname{div} h; \Omega)$, $W_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ непрерывно и плотно вложены в пространство $L_h(\Omega)$ и, следовательно, в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

На основе оценок из приложения установим неравенства, позволяющие применять лемму Лакса – Мильграма для доказательства разрешимости задач электродинамики. Пусть $d = d(\Omega)$ - диаметр области Ω , $T = T(\Omega)$ - константа из неравенства Пуанкаре.

Лемма 1.44. Для всех $\mathbf{u} \in W^0(\operatorname{div} h; \Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{2d^2}{h_1^2} \max\{1, h_2^2\} \left(\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right), \quad (1.20)$$

если $\mathbf{u} \in V^0(\operatorname{div} h; \Omega)$, то

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{d^2 h_2^2}{2h_1^2} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Доказательство. Применим оценку (п.17) к функциям $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $h \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$:

$$\int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \|\operatorname{div} h \mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{2,\Omega} \|h \mathbf{u}\|_{2,\Omega}),$$

где $C = \frac{d}{\sqrt{2}}$ в общем случае и $C = \frac{d}{\sqrt{6}}$ при $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Если $\operatorname{div} h \mathbf{u} \neq 0$, то

$$h_1 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq C \max\{1, h_2\} (\|\operatorname{div} h \mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{2,\Omega}) \leq 2C \max\{1, h_2\} (\|\operatorname{div} h \mathbf{u}\|_2^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_2^2)^{1/2},$$

откуда и следуют оценки (1.20), (1.21).

Лемма 1.45. Для всех $\mathbf{u} \in W_0(\operatorname{div} h; \Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2} \left(2 \frac{\max\{1, h_2\}}{h_1} \max \left\{ \sqrt{T}, \frac{d}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{T}{2}} d \right\} + \frac{1}{2} \right)^2 \left(\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right), \quad (1.22)$$

если $\mathbf{u} \in V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$, то

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{d^2 h_2^2}{2h_1^2} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x}, \quad (1.23)$$

если $\mathbf{u} \in W_0(\operatorname{div} h; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$, то

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{T}{h_1^2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x}. \quad (1.24)$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{div} h \mathbf{u} \neq 0$. Применим оценку (п.14) к функциям $\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $h \mathbf{u} \in H_0(\operatorname{div}; \Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} &\leq C \left(\left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} (h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{div} h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \right) + \\ &+ C \left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{div} h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $C = \max \left\{ \sqrt{T}, \frac{d}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{T}{2}} d \right\}$. Если $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$, можно взять $C = \sqrt{T}$, откуда следует

(1.24).

Пусть $\operatorname{rot} \mathbf{u} \neq 0$. Разрешая неравенство относительно $\left\{ \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}$, получаем, что

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2} (2C_1 + 1/2)^2 \left(\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right),$$

где $C_1 = C h_1^{-1} \max\{1, h_2\}$, то есть справедлива оценка (1.22).

Если $\mathbf{u} \in V_0(\operatorname{div} h; \Omega)$, то из следствия к теореме П.4 получаем, что

$$\int_{\Omega} (h \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\Omega} (h \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2},$$

то есть справедливо неравенство (1.23).

ГЛАВА 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Глава посвящена исследованию краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих при изучении стационарной системы уравнений Максвелла. Предложены обобщенные постановки этих задач, соответствующие различным краевым условиям. Доказаны существование и единственность решений при достаточно общих условиях на коэффициенты.

2.1. Постановка задач

Система дифференциальных уравнений классической электродинамики носит название уравнений Максвелла, и была впервые сформулирована в 60-х годах XIX века. Окончательная формулировка уравнений электродинамики принадлежит Герцу.

Пусть $\dot{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, $\dot{E}$ - вектор напряженности электрического поля, $\dot{J}$ - объемная плотность тока, $\dot{B}$ - вектор магнитной индукции, $\dot{D}$ - вектор электрической индукции, r - плотность электрических зарядов. К уравнениям Максвелла относятся уравнение, определяющее зависимость вихря магнитного поля от плотности токов проводимости и токов смещения

$$\text{rot } \dot{H} = \frac{4\pi}{c} \dot{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{D}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

уравнение, выражающее закон индукции электрического поля при изменении магнитного поля

$$\text{rot } \dot{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

уравнение Гаусса

$$\text{div } \dot{D} = 4\pi r. \quad (2.3)$$

и условие соленоидальности вектора магнитной индукции

$$\text{div } \dot{B} = 0. \quad (2.4)$$

При рассмотрении линейных сред справедливы материальные соотношения, связывающие между собой значения основных векторов электромагнитного поля

$$\dot{B} = m \dot{H}, \quad \dot{D} = e \dot{E}, \quad (2.5)$$

где m - тензор магнитной проницаемости среды, e - тензор диэлектрической проницаемости. Имеет место дифференциальная форма обобщенного закона Ома

$$\dot{\mathbf{J}} = s (\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^{cmp}), \quad (2.6)$$

где s - тензор проводимости, $\dot{\mathbf{E}}^{cmp}$ - напряженность поля сторонних электродвижущих сил. С использованием обозначения $\dot{\mathbf{J}}^{cmp} = s \dot{\mathbf{E}}^{cmp}$, (2.6) принимает вид

$$\dot{\mathbf{J}} = s \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}^{cmp}. \quad (2.7)$$

Стационарная система уравнений Максвелла, таким образом, записывается в гауссовой системе единиц в виде ([137]):

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{4p}{c} \dot{\mathbf{J}}(\dot{\mathbf{x}}), \quad (2.8)$$

$$\text{div } \dot{\mathbf{B}}(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{div } \dot{\mathbf{D}}(\dot{\mathbf{x}}) = 4pr(\dot{\mathbf{x}}), \quad (2.11)$$

где $\dot{\mathbf{x}} \in \Omega \subset R^3$. Пусть Ω - ограниченная открытая область класса C^2 , звездная относительно некоторой точки, $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{D}}, \dot{\mathbf{J}} : \Omega \rightarrow R^3$ и $r : \Omega \rightarrow R^1$ - неизвестные функции. Считаем, что справедливы соотношения (2.5) и (2.6), где $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} : \Omega \rightarrow R^3$ - заданная суммируемая с квадратом функция, e, s, m - самосопряженные линейные ограниченные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие при всех $\dot{\mathbf{u}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ условиям

$$e_1 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2 \leq (e\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})_{2,\Omega} \leq e_2 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2, \quad (2.12)$$

$$s_1 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2 \leq (s\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})_{2,\Omega} \leq s_2 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2, \quad (2.13)$$

$$m_1 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2 \leq (m\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}})_{2,\Omega} \leq m_2 \|\dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2, \quad (2.14)$$

$m_i, s_i, e_i, i = 1, 2, c$ - заданные положительные числа. В частности, допускается случай, когда $s = s(\dot{\mathbf{x}}), e = e(\dot{\mathbf{x}}), m = m(\dot{\mathbf{x}})$ - симметричные 3×3 матрицы измеримых на Ω функций, удовлетворяющие при почти всех $\dot{\mathbf{x}} \in \Omega$ и всех $\dot{\mathbf{x}} \in R^3$ условиям

$$e_1 |\dot{\mathbf{x}}|^2 \leq (e(\dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) \leq e_2 |\dot{\mathbf{x}}|^2, \quad m_1 |\dot{\mathbf{x}}|^2 \leq (m(\dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) \leq m_2 |\dot{\mathbf{x}}|^2, \quad (2.15)$$

$$s_1 |\dot{\mathbf{x}}|^2 \leq (s(\dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) \leq s_2 |\dot{\mathbf{x}}|^2. \quad (2.16)$$

Система дифференциальных уравнений (2.8)-(2.11) будет рассматриваться при двух видах краевых условий:

$$\dot{\mathbf{H}}_t(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} \in \partial\Omega. \quad (2.17)$$

и

$$\dot{\mathbf{B}}_n(\mathbf{x}) = 0, \dot{\mathbf{E}}_t(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.18)$$

Очевидно, что классического решения задач (2.5), (2.6), (2.8)–(2.11), (2.17) и (2.5), (2.6), (2.8) –(2.11), (2.18) в такой постановке, вообще говоря, не существует. Поэтому будем рассматривать только обобщенные решения задач, считая, что все равенства должны выполняться в смысле теории распределений, а граничные условия – в смысле теории следов ([34], [138]).

Решением задачи (2.5), (2.6), (2.8) –(2.11), (2.17) называются функции $\dot{\mathbf{H}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{E}} \in K(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{J}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{D}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и распределение $r \in D'(\Omega)$, удовлетворяющие равенствам (2.5), (2.6), (2.8), (2.11).

Решением задачи (2.5), (2.6), (2.8) –(2.11), (2.18) называются удовлетворяющие равенствам (2.5), (2.6), (2.8), (2.11) функции $\dot{\mathbf{H}} \in H(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}} \in K(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{E}} \in K(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{J}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{D}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и распределение $r \in D'(\Omega)$.

Выполнение (2.11) означает, что $r \in H^{-1}(\Omega)$,

$$\langle r, j \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \text{grad } j) d\mathbf{x}, \quad j \in H_0^1(\Omega). \quad (2.19)$$

Предположим, операторы m, e, s таковы, что образы непрерывно дифференцируемых функций из $\{L_2(\Omega)\}^3$ непрерывно дифференцируемы, а функция $\dot{\mathbf{E}}^{cmp}$ непрерывна в области Ω . Тогда очевидно, что если функции $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{D}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{J}}$ лежат в пространстве $\{C^1(\Omega)\}^3$ и удовлетворяют соотношениям (2.5), (2.6), (2.8) –(2.11) и условиям (2.17) или (2.18) в обычном смысле, то они являются решением задачи (2.5), (2.6), (2.8) –(2.11), (2.17) или (2.5), (2.6), (2.8) –(2.11), (2.18) соответственно.

С учетом соотношений (2.5), (2.6) уравнение (2.8) можно переписать в виде

$$\frac{c}{4\pi} s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^{cmp}. \quad (2.20)$$

откуда, ввиду (2.10), получаем, что в смысле теории распределений

$$\frac{c}{4\pi} \text{rot}(\sigma^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}) = \text{rot } \dot{\mathbf{E}}^{cmp}. \quad (2.21)$$

Пусть $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{D}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{J}}$ – решение задачи (2.5), (2.6), (2.8) –(2.11), (2.17). Тогда (2.9) означает, что $\text{div } m\dot{\mathbf{H}} = 0$, то есть $\dot{\mathbf{H}} \in V^0(\text{div } m; \Omega)$. Из соотношения (2.21) следует, что для любой функции $\dot{\mathbf{v}} \in \{D(\Omega)\}^3$

$$\frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (2.22)$$

По непрерывности, равенство (2.22) должно выполняться для всех $\dot{\mathbf{v}} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ и, в частности, для всех $\dot{\mathbf{v}} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Таким образом, задача (2.5), (2.6), (2.8) – (2.11), (2.17) сводится к следующей задаче определения напряженности магнитного поля: найти функцию $\dot{\mathbf{H}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, для которой при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ выполнено равенство (2.22).

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{H}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ записывается в виде

$$I(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} - \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega). \quad (2.23)$$

Пусть теперь $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{D}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{J}}$ – решение задачи (2.5), (2.6), (2.8) – (2.11), (2.18). Так как $\dot{\mathbf{B}} = m\dot{\mathbf{H}} \in H_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap K(\operatorname{div}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{H}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Умножим обе части равенства (2.20) скалярно на $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}} \in \{C^1(\overline{\Omega})\}^3$, и проинтегрируем по Ω :

$$\frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Поскольку $\dot{\mathbf{E}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, последнее слагаемое равно нулю и, следовательно, справедливо (2.22). По непрерывности (2.22) выполнено для всех $\dot{\mathbf{v}} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ и, в частности, для всех $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Задача определения напряженности магнитного поля при краевых условиях (2.18) допускает, таким образом, следующую постановку: найти функцию $\dot{\mathbf{H}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, для которой при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ выполнено равенство (2.22).

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{H}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ записывается в виде

$$I(\dot{\mathbf{u}}) \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega), \quad (2.24)$$

где функционал $I(\dot{\mathbf{u}})$ задается тем же выражением, что и в (2.23).

Из лемм 1.24, 1.26 следует, что соотношения (2.9), (2.10) позволяют в качестве новых неизвестных величин ввести векторный магнитный потенциал $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}(\dot{\mathbf{x}})$ и скалярный электрический потенциал $j = j(\dot{\mathbf{x}})$ по формулам

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } j. \quad (2.25)$$

В этом случае уравнение (2.8) переписывается с учетом (2.5), (2.6) в виде

$$\text{rot}(\mu^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}) = \frac{4\pi}{c} (-\sigma \text{grad } \varphi + \dot{\mathbf{J}}^{cmp}). \quad (2.26)$$

Краевые условия для векторного потенциала $\dot{\mathbf{A}}$, соответствующие краевым условиям (2.17), записываются в виде:

$$(m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}})_t(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} \in \partial\Omega. \quad (2.27)$$

Краевые условия, соответствующие краевым условиям (2.18), имеют вид

$$(\text{rot } \dot{\mathbf{A}})_n(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (\text{grad } j)_t(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} \in \partial\Omega. \quad (2.28)$$

Решением задачи (2.26), (2.27) называем функции $j \in H^1(\Omega)$, $\dot{\mathbf{A}} \in H(\text{rot}; \Omega)$ такие, что $m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ и справедливо равенство (2.26).

Решением задачи (2.26), (2.28) называем функции $j \in H^1(\Omega)$, $\dot{\mathbf{A}} \in H(\text{rot}; \Omega)$ такие, что $\text{rot } \dot{\mathbf{A}} \in H_0(\text{div}; \Omega)$, $\text{grad } j \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ и справедливо равенство (2.26). Согласно теоремам 1.8, 1.9, из включений $\text{rot } \dot{\mathbf{A}} \in H_0(\text{div}; \Omega)$, $\text{grad } j \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ следует выполнение в смысле теории следов граничных условий (2.28)

Пусть функция $\dot{\mathbf{J}}^{cmp}$ непрерывно дифференцируема в области Ω , операторы m и s переводят дифференцируемые функции в дифференцируемые, $j \in C^1(\Omega)$ и $\dot{\mathbf{A}} \in \{C^2(\Omega)\}^3$ удовлетворяют уравнению (2.26) и краевым условиям (2.27) или (2.28) в обычном смысле. Тогда $\dot{\mathbf{A}}$, φ являются решением задачи (2.26), (2.27) или (2.26), (2.28) соответственно.

Очевидно, что решение поставленных задач определяется неоднозначно.

Для обеспечения единственности решения задач в терминах потенциалов традиционно вводятся дополнительные условия (калибровочные соотношения), которым должны удовлетворять неизвестные функции ([57], [79], [85], [137]). В работе предлагаются следующие два вида новых калибровочных соотношений:

для задачи (2.26), (2.27)

$$\text{div } s\dot{\mathbf{A}} = 0, \quad (s\dot{\mathbf{A}})_n|_{\partial\Omega} = 0; \quad (2.29)$$

$$j = -k \text{div } s\dot{\mathbf{A}}, \quad (s\dot{\mathbf{A}})_n|_{\partial\Omega} = 0; \quad (2.30)$$

в случае краевых условий (2.28)

$$\text{div } s\dot{\mathbf{A}} = 0, \quad \dot{\mathbf{A}}_t|_{\partial\Omega} = 0, \quad j|_{\partial\Omega} = 0; \quad (2.31)$$

$$j = -k \operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{A}}|_{\partial\Omega} = 0, j|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.32)$$

В (2.30), (2.32) k - произвольное положительное число. Условие $j|_{\partial\Omega} = 0$ означает, ввиду леммы 1.30, что $(\operatorname{grad} \varphi)|_{\partial\Omega} = 0$.

Пусть $\dot{\mathbf{A}}, j$ - решение задачи (2.26), (2.27). Калибровочные соотношения (2.29), (2.30) означают, что $\dot{\mathbf{A}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Умножим равенство (2.26) скалярно на функцию $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и проинтегрируем по Ω :

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} j \operatorname{div} s \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \frac{4p}{c} \langle g_n(s \dot{\mathbf{v}}), j \rangle. \quad (2.33)$$

Последнее слагаемое равно нулю за счет выбора $\dot{\mathbf{v}}$.

При калибровочных соотношениях (2.29), таким образом, задача (2.26), (2.27) сводится к следующей задаче определения векторного магнитного потенциала: найти функцию $\dot{\mathbf{A}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, для которой при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (2.34)$$

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{A}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ записывается в виде

$$I(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} - \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega). \quad (2.35)$$

При калибровочных соотношениях (2.30) тождество (2.33) примет вид

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \quad (2.36)$$

и задача (2.26), (2.27) допускает следующую обобщенную формулировку: найти функцию $\dot{\mathbf{A}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, для которой при всех $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство (2.36).

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{A}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ записывается в виде:

$$I(\dot{\mathbf{u}}) \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$$

$$I(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} + \frac{2p}{c} k \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{u}})^2 d\mathbf{x} - \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x}. \quad (2.37)$$

Пусть $\dot{\mathbf{A}}, j$ - решение задачи (2.26), (2.28). Калибровочные соотношения (2.31), (2.32) означают, что $\dot{\mathbf{A}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $j \in H_0^1(\Omega)$. Умножим обе части равенства (2.26) на

$\mathbf{r} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Проинтегрировав по Ω , приходим к (2.33), в котором последнее слагаемое равно нулю в силу условий, налагаемых на j .

При калибровочных соотношениях (2.31) задача (2.26), (2.27) сводится к следующей задаче определения векторного магнитного потенциала: найти функцию $\dot{\mathbf{A}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, для которой при всех $\mathbf{r} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство (2.34).

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{A}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ записывается в виде

$$I(\dot{\mathbf{u}}) \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega), \quad (2.38)$$

где функционал I имеет тот же вид, что и в (2.35).

При калибровочных соотношениях (2.32) задача (2.26), (2.27) сводится к следующей задаче определения $\dot{\mathbf{A}}$: найти функцию $\dot{\mathbf{A}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, для которой при всех $\mathbf{r} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство (2.36).

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{A}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ записывается в виде:

$$I(\dot{\mathbf{u}}) \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega), \quad (2.39)$$

где функционал I задается формулой (2.37).

2.2. Существование и свойства решений

Теорема 2.1. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная звездная область класса C^2 , $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, e, s, m - самосопряженные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям (2.12) – (2.14). Тогда задача (2.5), (2.6), (2.8)-(2.11), (2.17) имеет единственное решение.

Доказательство. Доказательство теоремы 2.1 практически повторяет приведенное в статье [50] доказательство аналогичного утверждения для случая, когда m, s - измеримые функции.

С использованием леммы Лакса-Мильграма, возможность применения которой следует из оценки (1.21), устанавливается, что существует единственное решение $\dot{\mathbf{H}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ задачи (2.23). Доказывается, что функция $\dot{\mathbf{E}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, определяемая соотношением

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{c}{4\pi} s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{E}}^{cmp}, \quad (2.40)$$

лежит в пространстве $K(\text{rot}; \Omega)$. Остальные неизвестные функции определяются из соотношений (2.5), (2.6), (2.8), при этом $\dot{\mathbf{H}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}} \in K(\text{div}; \Omega)$ по определению пространства $V^0(\text{div } m; \Omega)$, функции $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$ суммируемы с квадратом. Таким образом, $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$, r - решение задачи (2.5), (2.6), (2.8)-(2.11), (2.17)

Теорема 2.2. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная звездная область класса C^2 , $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, e , s , m - самосопряженные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям (2.12) – (2.14). Тогда задача (2.5), (2.6), (2.8)-(2.11), (2.18) имеет единственное решение.

Доказательство. Положим в лемме Лакса-Мильграма $H = V_0(\text{div } m; \Omega)$, для всех $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ пусть

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} (s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{u}} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}, \quad f(\dot{\mathbf{v}}) = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

$a(\cdot, \cdot)$ - билинейная симметричная форма на $V_0(\text{div } m; \Omega)$, f - линейный функционал. Используя условие (2.12), лемму 1.33 и неравенство Гельдера с показателем 2, получаем, что

$$|a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}})| \leq \frac{1}{s_1} \left\{ \int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{u}})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{v}})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \leq \frac{1}{s_1} \|\dot{\mathbf{u}}\|_v \|\dot{\mathbf{v}}\|_v,$$

то есть форма $a(\cdot, \cdot)$ непрерывна. Коэрцитивность формы следует из леммы 1.45 при $h = m$.

Непрерывность функционала f следует из оценки

$$|f(\dot{\mathbf{v}})| \leq \frac{4p}{c} \left\{ \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} \dot{\mathbf{v}}^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \leq \frac{4p}{c} \left\{ \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \|\dot{\mathbf{v}}\|_v.$$

Поскольку выполнены все условия леммы Лакса - Мильграма, существует единственный элемент $\dot{\mathbf{H}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$, при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ удовлетворяющий равенству (2.22), то есть являющийся решением задачи (2.24).

Определим теперь функцию $\dot{\mathbf{E}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ формулой (2.40). Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{D(\overline{\Omega})\}^3$. Ввиду леммы 1.42, $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in K_0(\text{div } m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\text{rot}; \Omega)$. Поскольку $\text{rot } \dot{\mathbf{v}} = \text{rot } \dot{\mathbf{y}}$, $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$. Находим таким образом, что

$$\int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = 0,$$

откуда, согласно теореме 1.9 следует, что $\dot{\mathbf{E}} \in K(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Положим $\dot{\mathbf{B}} = m\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{J}} = \frac{c}{4p} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{D}} = e\dot{\mathbf{E}}$ и определим функционал $r \in H^{-1}(\Omega)$ соотношением (2.11). Тогда $\dot{\mathbf{H}} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}} \in K(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ по определению пространства $V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, функции $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{D}}$ суммируемы с квадратом. Таким образом, $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$, r - решение задачи (2.5), (2.6), (2.8)-(2.11), (2.18).

Очевидно, уравнение (2.11) в данной постановке задач самостоятельного значения не имеет и может лишь служить для определения неизвестной функции r как функционала $r : H_0^1(\Omega) \rightarrow R^1$, действующего по формуле (2.19).

Теорема 2.3. Существует единственное решение вариационной задачи (2.35).

Доказательство. Для всех $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ положим

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}, \quad f(\dot{\mathbf{v}}) = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Очевидно, $a(\cdot, \cdot)$ - билинейная симметричная форма на $V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, f - линейный функционал. Используя условие (2.12), лемму 1.36 и неравенство Гельдера с показателем 2, получаем, что форма $a(\cdot, \cdot)$ и функционал f непрерывны. Коэрцитивность формы a следует из леммы 1.45, где $h = s$.

Поскольку выполнены все условия леммы Лакса-Мильграма, существует единственное решение задачи (2.35).

Теорема 2.4. Существует единственное решение вариационной задачи (2.37).

Доказательство. Положим для $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{u}} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x}, \quad f(\dot{\mathbf{v}}) = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Как и ранее, видно, что f - линейный непрерывный функционал, $a(\cdot, \cdot)$ - симметричная билинейная форма на $W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Используя условие (2.12) и неравенство Гельдера с показателем 2, получаем, что форма $a(\cdot, \cdot)$ непрерывна с константой $a_2 = \max \left\{ \frac{1}{m_1}, \frac{4p}{c} k \right\}$, применяя оценку (1.22)

находим, что форма $a(\cdot, \cdot)$ коэрцитивна с константой

$$a_1 = \min \left\{ \frac{1}{m_2}, \frac{4p}{c} k \right\} \min \left\{ \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} + \frac{2d}{s_1} \max \left\{ \sqrt{T}, \frac{d}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{T}{2}} d \right\} \max \{1, s_2\} \right)^{-2} \right\}.$$

Утверждение теоремы следует тогда из леммы Лакса – Мильграма.

Теорема 2.5. Существует единственное решение вариационной задачи (2.38).

Доказательство. Для всех $\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ положим

$$a(\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}}) = \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\bar{u}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{\bar{v}}) = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x}.$$

Очевидно, $a(\cdot, \cdot)$ - симметричная билинейная форма на $V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, f - линейный функционал. Непрерывность формы $a(\cdot, \cdot)$ и функционала f устанавливается как в теореме 2.3.

Применяя лемму 1.44 при $h = s$, получаем, что форма a коэрцитивна.

Поскольку выполнены все условия леммы Лакса-Мильграма, существует единственное решение задачи (2.38).

Теорема 2.6. Существует единственное решение вариационной задачи (2.39).

Доказательство. Положим для $\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$a(\mathbf{\bar{u}}, \mathbf{\bar{v}}) = \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\bar{u}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{u}} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{v}} d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{\bar{v}}) = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x}.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.4 получаем, что f - линейный непрерывный функционал, $a(\cdot, \cdot)$ - симметричная билинейная непрерывная форма на $W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Применяя оценку (1.20) с $h = s$, получаем, что форма $a(\cdot, \cdot)$ коэрцитивна.

Утверждение теоремы следует из леммы Лакса – Мильграма.

Соотношения (2.22), (2.34), (2.36) могут являться исходными для применения при дискретизации вариационно-разностных методов и метода конечных элементов. Тем не менее, при аппроксимации пространств $V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, возникает проблема учета условий соленоидальности

$$\operatorname{div} m \mathbf{\bar{u}} = 0,$$

$$\operatorname{div} s \mathbf{\bar{u}} = 0,$$

которые не позволяют непосредственно использовать при дискретизации классические базисные функции.

Этот вопрос подробно освещен в литературе в связи с задачами гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости и его решение связано либо с введением специальных аппроксимирующих пространств, либо с организацией итерационных процессов ([9], [58], [59], [138], [152], [159], [163] – [165], [174], [176], [180]).

В [50] приводится эквивалентное (2.22) разрешающее соотношение для определения неизвестной функции $\dot{H}(\mathbf{r})$, в котором условие $\operatorname{div} m\dot{H} = 0$ является свойством решения. Ставится задача: найти функцию $\dot{H} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, для которой при всех $\dot{\mathbf{v}} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} m\dot{H} \operatorname{div} m\dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}, \quad (2.41)$$

где k - произвольное положительное число. Справедлива

Теорема 2.7. При любом $k > 0$ существует единственное решение $\dot{H} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ интегрального тождества (2.41), при этом справедливо включение $\dot{H} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и, следовательно, $\dot{H}$ совпадает с решением задачи (2.23).

В случае краевых условий (2.18), рассмотрим следующую задачу определения $\dot{H}$: найти функцию $\dot{H} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, при всех $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ удовлетворяющую тождеству (2.41).

Теорема 2.8. При любом $k > 0$ существует единственное решение $\dot{H} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ интегрального тождества (2.41), при этом справедливо включение $\dot{H} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и, следовательно, $\dot{H}$ совпадает с решением задачи (2.24).

Доказательство. Пусть $\dot{H}_1, \dot{H}_2 \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ удовлетворяют (2.41) при всех $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Тогда $\dot{\mathbf{w}} = \dot{H}_1 - \dot{H}_2 \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и при всех $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} m\dot{\mathbf{w}} \operatorname{div} m\dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = 0.$$

Полагая $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{w}}$ получим, что $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}} = 0$, $\operatorname{div} m\dot{\mathbf{w}} = 0$ и из оценки (1.22) следует, что $\dot{\mathbf{w}} = 0$, то есть решение поставленной задачи единственно.

Пусть $\dot{H} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ - решение задачи (2.24), $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Тогда $\dot{H} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{w}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$.

$$\int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x},$$

Так как $\operatorname{div} m\dot{H} = 0$, справедливо (2.41), то есть $\dot{H}$ - решение поставленной задачи.

Следующие теоремы устанавливают связь между задачами в терминах векторного магнитного потенциала при различных калибровочных соотношениях.

Теорема 2.9. Пусть $\dot{\mathbf{A}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.35), $\dot{\mathbf{A}}_k \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.37). Тогда при $k \rightarrow \infty$ $\dot{\mathbf{A}}_k \rightarrow \dot{\mathbf{A}}$ в пространстве $W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{\bar{a}} = \dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Согласно лемме 1.37, $\mathbf{\bar{a}} = \mathbf{\bar{a}}_1 + \mathbf{\bar{a}}_2$, где $\mathbf{\bar{a}}_1 \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\mathbf{\bar{a}}_2 \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Возьмем произвольные $\mathbf{\bar{v}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\mathbf{\bar{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Тогда $\mathbf{\bar{w}} = \mathbf{\bar{v}} + \mathbf{\bar{g}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Ввиду (2.34), (2.36) справедливы тождества

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_k \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_k \operatorname{div} s \mathbf{\bar{g}} d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{w}}) d\mathbf{x},$$

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x},$$

откуда следует, что

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\bar{a}}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}}_2 \operatorname{div} s \mathbf{\bar{g}} d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{g}}) d\mathbf{x}.$$

В частности, при всех $\mathbf{\bar{v}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\bar{a}}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} = 0,$$

то есть $\mathbf{\bar{a}}_1 = 0$, $\mathbf{\bar{a}} = \mathbf{\bar{a}}_2 \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_k = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}$ и при всех $\mathbf{\bar{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{g}} d\mathbf{x} = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{g}}) d\mathbf{x}. \quad (2.42)$$

Применяя к $\mathbf{\bar{a}}$ оценку (1.24) получим

$$\int_{\Omega} \mathbf{\bar{a}}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{T}{s_1^2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}})^2 d\mathbf{x}.$$

Положим в (2.42) $\mathbf{\bar{g}} = \mathbf{\bar{a}}$. Тогда, согласно неравенству Гельдера,

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}})^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{a}}) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{k} \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{\bar{a}})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

Получаем, таким образом,

$$\|\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}\|_W = \|\mathbf{\bar{a}}\|_W = \left\{ \|\mathbf{\bar{a}}\|_{2,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}}\|_{2,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{\sqrt{T}}{k s_1} \left(1 + \frac{T}{s_1^2} \right)^{1/2} \|\mathbf{J}^{cmp}\|_{2,\Omega},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 2.10. Пусть $\dot{\mathbf{A}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.38), $\dot{\mathbf{A}}_k \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.39). Тогда при $k \rightarrow \infty$ $\dot{\mathbf{A}}_k \rightarrow \dot{\mathbf{A}}$ в пространстве $W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{\bar{a}} = \dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Согласно лемме 1.36, $\mathbf{\bar{a}} = \mathbf{\bar{a}}_1 + \mathbf{\bar{a}}_2$, где $\mathbf{\bar{a}}_1 \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\mathbf{\bar{a}}_2 \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Возьмем произвольные $\mathbf{\bar{v}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\mathbf{\bar{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Тогда $\mathbf{\bar{w}} = \mathbf{\bar{v}} + \mathbf{\bar{g}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Из тождеств (2.34), (2.36) получаем, что

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\bar{a}}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}}_2 \operatorname{div} s \mathbf{\bar{g}} d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{g}}) d\mathbf{x}.$$

В частности, при всех $\mathbf{\bar{v}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\bar{a}}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{x} = 0,$$

то есть $\mathbf{\bar{a}}_1 = 0$, $\mathbf{\bar{a}} = \mathbf{\bar{a}}_2 \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_k = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}$ и при всех $\mathbf{\bar{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}} \operatorname{div} s \mathbf{\bar{g}} d\mathbf{x} = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{g}}) d\mathbf{x}. \quad (2.43)$$

Применяя к $\mathbf{\bar{a}}$ оценку (1.20) получим

$$\int_{\Omega} \mathbf{\bar{a}}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{d^2 s_2^2}{6s_1^2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}})^2 d\mathbf{x}.$$

Положим в (2.43) $\mathbf{\bar{g}} = \mathbf{\bar{a}}$. Тогда, согласно неравенству Гельдера,

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}})^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{k} \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\bar{a}}) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{k} \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{\bar{a}})^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2}.$$

Получаем, таким образом:

$$\|\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}\|_W = \|\mathbf{\bar{a}}\|_W = \left\{ \|\mathbf{\bar{a}}\|_{2,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} s \mathbf{\bar{a}}\|_{2,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{ds_2}{\sqrt{6ks_1}} \left(1 + \frac{2d^2}{s_1^2} \right)^{1/2} \|\mathbf{J}^{cmp}\|_{2,\Omega}^2,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Изучим связь между постановками задач в терминах векторного магнитного потенциала и альтернативными постановкам для напряженности магнитного поля.

Теорема 2.11. Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ - решение задачи (2.23), $\dot{\mathbf{A}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и $\dot{\mathbf{A}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решения задач (2.35) и (2.37) соответственно. Тогда

$$m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_k = \dot{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Так как $m\dot{H} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$, найдется, по лемме 1.24, функция $\dot{q} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ такая, что $m\dot{H} = \operatorname{rot} \dot{q}$. Согласно лемме Лакса-Мильграма, существует элемент $\dot{z} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$, удовлетворяющий при всех $\dot{h} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ равенству

$$\int_{\Omega} (s\dot{z} \cdot \dot{h}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (s\dot{q} \cdot \dot{h}) d\mathbf{x}.$$

Тогда, ввиду леммы 1.29, $s(\dot{q} - \dot{z}) \in K^{\perp}(\operatorname{rot}; \Omega) = K(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$. Так как $\dot{z} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\operatorname{rot}(\dot{q} - \dot{z}) = \operatorname{rot} \dot{q} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Таким образом,

$$\dot{a} = \dot{q} - \dot{z} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega), \quad \operatorname{rot} \dot{a} = m\dot{H}.$$

Покажем, что $\dot{a}$ - решение задачи (2.35).

Согласно лемме 1.22, для всех $\dot{v} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{a} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{H} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{H} \cdot \dot{v}) d\mathbf{x}.$$

Далее, так как по лемме 1.29 $s\dot{v} \in K^{\perp}(\operatorname{rot}; \Omega)$, найдется, согласно лемме 1.28, последовательность $\{\dot{y}_n\} \in \{D(\Omega)\}^3$ такая, что $\operatorname{rot} \dot{y}_n \rightarrow s\dot{v}$ при $n \rightarrow \infty$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма, для каждой функции $\dot{y}_n$ найдется единственная функция $p_n \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $w \in H_0^1(\Omega)$ равенству

$$\int_{\Omega} (m \operatorname{grad} p_n \cdot \operatorname{grad} w) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (m \dot{y}_n \cdot \operatorname{grad} w) d\mathbf{x}.$$

Тогда $\dot{w}_n = \dot{y}_n - \operatorname{grad} p_n \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\operatorname{div} m\dot{w}_n = 0$, то есть $\dot{w}_n \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и $\operatorname{rot} \dot{w}_n = \operatorname{rot} \dot{y}_n$. Используя тождество (2.22), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{a} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H} \cdot s\dot{v}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H} \cdot \operatorname{rot} \dot{y}_n) d\mathbf{x} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H} \cdot \operatorname{rot} \dot{w}_n) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\dot{E}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{y}_n) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (s\dot{E}^{cmp} \cdot \dot{v}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

следовательно $\dot{a} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, удовлетворяет равенству (2.34) при всех $\dot{v} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и, в силу единственности решения задачи (2.35), $\dot{a} = \dot{A}$. $\operatorname{rot} \dot{A} = m\dot{H}$ по построению.

Поскольку, как установлено в теореме 2.9, $\operatorname{rot} \dot{A}_k = \operatorname{rot} \dot{A}$, теорема доказана.

Следствие. Пусть $\dot{\mathbf{A}} \in W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ - решение задачи (2.35) или (2.37). Тогда функция $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, то есть выполнено в смысле теории следов граничное условие (2.27).

Теорема 2.12. Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ - решение задачи (2.24), $\dot{\mathbf{A}} \in V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ и $\dot{\mathbf{A}} \in W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ - решения задач (2.38) и (2.39) соответственно. Тогда

$$m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_k = \dot{\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Так как $m\dot{\mathbf{H}} \in K(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$, найдется, по лемме 1.32, последовательность $\{\mathbf{q}_n\} \in \{D(\Omega)\}^3$ такая, что $\|m\dot{\mathbf{H}} - \operatorname{rot} \mathbf{q}_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для каждого n , согласно лемме Лакса-Мильграма, существует элемент $y_n \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий при всех $q \in H_0^1(\Omega)$ равенству

$$\int_{\Omega} (\mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} y_n \cdot \operatorname{grad} q) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{q}_n \cdot \operatorname{grad} q) d\mathbf{x}.$$

Тогда $\mathbf{s}(\mathbf{q}_n - \operatorname{grad} y_n) \in K(\operatorname{div}; \Omega)$, $\operatorname{rot}(\mathbf{q}_n - \operatorname{grad} y_n) = \operatorname{rot} \mathbf{q}_n \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Таким образом, $\mathbf{a}_n = \mathbf{q}_n - \operatorname{grad} y_n \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega) = V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$. Применяя оценку (1.21) получаем, что последовательность $\{\mathbf{a}_n\}$ сходится в $V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ к некоторому элементу $\mathbf{a} \in V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = m\dot{\mathbf{H}}$. Покажем, что $\mathbf{a}$ - решение задачи (2.38).

Согласно лемме 1.22, для всех $\mathbf{v} \in V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x}.$$

Далее, так как $\mathbf{s}\mathbf{v} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$, по лемме 1.24 найдется функция $\dot{\mathbf{Q}} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ такая, что $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{s}\mathbf{v}$.

Применяя лемму Лакса-Мильграма, находим, что существует функция $\dot{\mathbf{z}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$, удовлетворяющая при всех $\mathbf{w} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ равенству

$$\int_{\Omega} (m\dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (m\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x}.$$

Тогда $\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{z}} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $m\dot{\mathbf{h}} \in K^\perp(\operatorname{rot}; \Omega)$, то есть $\dot{\mathbf{h}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{h}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{Q}}$.

Используя тождество (2.22), получаем

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{s}^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{s}\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{s}^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{Q}}) d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\mathbf{E}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (s \mathbf{E}^{cmp} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x},$$

следовательно, $\mathbf{a} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ удовлетворяет равенству (2.34)

при всех $\mathbf{v} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и в силу единственности решения задачи (2.38), $\mathbf{a} = \mathbf{A}$, $\operatorname{rot} \mathbf{A} = m \mathbf{H}$ по построению.

Поскольку, как установлено в теореме 2.9, $\operatorname{rot} \mathbf{A}_k = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, теорема доказана.

Следствие. Пусть $\mathbf{A} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.38) или (2.39). Тогда функция $\operatorname{rot} \mathbf{A} \in H_0(\operatorname{div}; \Omega)$, то есть выполнено в смысле теории следов граничное условие (2.28).

Пусть $\mathbf{A}_k \in W(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.37) или (2.39). Положим $\mathbf{J} = \frac{c}{4p} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{c}{4p} \operatorname{rot} m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_k$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = s^{-1}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^{cmp})$, $\mathbf{D} = e \mathbf{E}$ и определим функционал $r \in H^{-1}(\Omega)$ формулой (2.19).

Определим теперь функцию $j \in L_2(\Omega)$ соотношением

$$j = -k \operatorname{div} s \mathbf{A}_k. \quad (2.44)$$

Лемма 2.1. Пусть $\mathbf{A}_k \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.37). Тогда $\mathbf{A}_k$, j - решение задачи (2.26), (2.27).

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in \{D(\Omega)\}^3$. Тогда $s^{-1} \mathbf{y} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и, согласно лемме 1.39, $s^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{g}$, где $\mathbf{v} \in K_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\mathbf{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$. Поскольку $\operatorname{div} s \mathbf{g} = \operatorname{div} \mathbf{y} \in L_2(\Omega)$, $\mathbf{g} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Пусть последовательность $\{\mathbf{v}_n\} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ такова, что $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ при $n \rightarrow \infty$ в $L_s(\Omega)$. Для любого $n \in N$ согласно тождеству (2.36)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (s \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_n) d\mathbf{x} &= \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_n) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{v}_n) d\mathbf{x} = \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_n) d\mathbf{x} - \\ &- \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{v}_n) d\mathbf{x} = \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_k \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_n) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{v}_n) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (s \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}) d\mathbf{x} = \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{g}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{g}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{g}) d\mathbf{x}.$$

С другой стороны, $\int_{\Omega} j \operatorname{div} y^{\mathbf{r}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} j \operatorname{div} s \mathbf{g}^{\mathbf{r}} d\mathbf{x}$. Так как $j = -k \operatorname{div} s (\mathbf{\dot{A}}_k - \mathbf{\dot{A}})$, где $\mathbf{\dot{A}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.35), из равенства (2.44) получаем, что $\int_{\Omega} j \operatorname{div} s \mathbf{g}^{\mathbf{r}} d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{g}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x}$, то есть для всех $y^{\mathbf{r}} \in \{D(\Omega)\}^3$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{E} \cdot y^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} j \operatorname{div} y^{\mathbf{r}} d\mathbf{x}. \quad (2.45)$$

Подставляя в это равенство в качестве $y^{\mathbf{r}}$ функции $y^{\mathbf{r}}_i = w \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, где $w \in D(\Omega)$, получаем утверждение леммы.

Следствие. Функции $\mathbf{\dot{H}}$, $\mathbf{\dot{B}}$, $\mathbf{\dot{J}}$, $\mathbf{\dot{E}}$, $\mathbf{\dot{D}}$, r - решение задачи (2.5), (2.6), (2.8)-(2.11), (2.17).

Лемма 2.2. Пусть $\mathbf{\dot{A}}_k \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.39). Тогда $\mathbf{\dot{A}}_k$, j - решение задачи (2.26), (2.28).

Доказательство. Согласно теореме 1.8, $j \in H^1_0(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $j \in H^1(\Omega)$ и для всех $\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} j \operatorname{div} \mathbf{w} d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} (\operatorname{grad} j \cdot \mathbf{w}) d\mathbf{x},$$

то есть утверждение леммы справедливо, если равенство (2.45) выполняется для всех $y^{\mathbf{r}} \in \{C^1(\Omega)\}^3$.

Пусть $y^{\mathbf{r}} \in \{C^1(\Omega)\}^3$. Тогда $s^{-1} y^{\mathbf{r}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ и, согласно лемме 3.5, $s^{-1} y^{\mathbf{r}} = \mathbf{\dot{v}} + \mathbf{\dot{g}}$, где $\mathbf{\dot{v}} \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\mathbf{\dot{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$. Поскольку $\operatorname{div} s \mathbf{\dot{g}} = \operatorname{div} y^{\mathbf{r}} \in L_2(\Omega)$, $\mathbf{\dot{g}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Пусть последовательность $\{\mathbf{\dot{v}}_n\} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ такова, что $\mathbf{\dot{v}}_n \rightarrow \mathbf{\dot{v}}$ при $n \rightarrow \infty$ в $L_s(\Omega)$. Для любого $n \in N$ согласно тождеству (2.36)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (s \mathbf{\dot{E}} \cdot \mathbf{\dot{v}}_n) d\mathbf{x} &= \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{\dot{H}} \cdot \mathbf{\dot{v}}_n) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\dot{v}}_n) d\mathbf{x} = \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\mathbf{\dot{H}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\dot{v}}_n) d\mathbf{x} - \\ &- \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\dot{v}}_n) d\mathbf{x} = \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\dot{A}}_k \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\dot{v}}_n) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\dot{v}}_n) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{\dot{E}} \cdot y^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (s \mathbf{\dot{E}} \cdot \mathbf{\dot{g}}) d\mathbf{x} = \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{\dot{H}} \cdot \mathbf{\dot{g}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\dot{g}}) d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \mathbf{\dot{g}}) d\mathbf{x}.$$

С другой стороны, $\int_{\Omega} j \operatorname{div} \mathbf{y}^{\mathbf{r}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} j \operatorname{div} s \mathbf{g}^{\mathbf{r}} d\mathbf{x}$. Так как $j = -k \operatorname{div} s (\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}})$, где $\dot{\mathbf{A}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решение задачи (2.38), из равенства (2.44) получаем, что $\int_{\Omega} j \operatorname{div} s \mathbf{g}^{\mathbf{r}} d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \mathbf{g}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x}$, то есть для всех $\mathbf{y}^{\mathbf{r}} \in \{C^1(\Omega)\}^3$ справедливо (2.45), что и требовалось доказать.

Следствие. Функции $\dot{H}$, $\dot{B}$, $\dot{J}$, $\dot{E}$, $\dot{D}$, r - решение задачи (2.5), (2.6), (2.8)-(2.11), (2.18).

2.3. Асимптотический анализ решений системы уравнений Максвелла при малых значениях коэффициентов в подобластях

Пусть область $\Omega \subset R^3$, в которой рассматривается система уравнений Максвелла (2.8) – (2.11) содержит занимающее множество $\Omega_0 \subset \Omega$ непроводящие включения, в которых плотности токов $\dot{\mathbf{J}}$ и $\dot{\mathbf{J}}^{cmp}$ равны нулю.

Считаем, что справедливы материальные соотношения (2.5), (2.7), где e , m - матрицы измеримых функций, удовлетворяющие при всех $\dot{\mathbf{x}} \in R^n$ и почти всех $\dot{\mathbf{x}} \in \Omega$ условиям (2.15), $s = s(\dot{\mathbf{x}})$ - заданная матрица измеримых функций, удовлетворяющая условиям

$$s_{ij}(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{при почти всех } \dot{\mathbf{x}} \in \Omega_0, \quad (2.46)$$

при почти всех $\dot{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus \Omega_0$ справедливо (2.16).

Пусть $\dot{\mathbf{J}}^{cmp} : \Omega \rightarrow R^3$ - известная суммируемая с квадратом функция, удовлетворяющая условию

$$\dot{\mathbf{J}}^{cmp}(\dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad \text{при почти всех } \dot{\mathbf{x}} \in \Omega_0. \quad (2.47)$$

Пусть неизвестная функция $r : \Omega \rightarrow R^1$ удовлетворяет условию

$$r(\dot{\mathbf{x}}) = r_0(\dot{\mathbf{x}}) \quad \text{при почти всех } \dot{\mathbf{x}} \in \Omega_0, \quad (2.48)$$

где $r_0 : \Omega_0 \rightarrow R^1$ - заданная суммируемая с квадратом функция.

Система уравнений (2.5), (2.7) – (2.11) будет, как и раньше, рассматриваться при краевых условиях (2.17) и (2.18).

К множеству Ω_0 предъявляются следующие требования. Считаем, что $\Omega_0 = \bigcup_{k=1}^m \Omega_{0,k}$, где $\Omega_{0,k}$, $k = 1, \dots, m$, - открытые связные подмножества множества Ω с

соответствующими границами класса C^2 , лежащие локально по одну сторону от своих границ, такие, что $\overline{\Omega}_{0,k} \subset \Omega$,

$$\overline{\Omega}_{0,i} \cap \overline{\Omega}_{0,j} = \emptyset \text{ при } i \neq j, i, j = 1, \dots, m,$$

$\Omega \setminus \Omega_0$ - связное множество.

Решением задачи (2.5), (2.7) – (2.11), (2.17), (2.48) называются функции $\dot{\mathbf{H}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{J}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{E}} \in K(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{D}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $r \in H^{-1}(\Omega)$, удовлетворяющие равенствам (2.5), (2.7), (2.8), (2.11), (2.48).

Решением задачи (2.5), (2.7) – (2.11), (2.18), (2.48) называются удовлетворяющие равенствам (2.5), (2.7), (2.8), (2.11), (2.48) функции $\dot{\mathbf{H}} \in H(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}} \in K(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{J}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{E}} \in K(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{D}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $r \in H^{-1}(\Omega)$.

Выполнение (2.11), (2.48) подразумевает, что функционал r , определенный соотношением (2.17), удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega_0} r_0 j d\mathbf{x} = \langle r, j \rangle, j \in H_0^1(\Omega_0), \quad (2.49)$$

то есть его сужение на множество Ω_0 совпадает с заданной функцией r_0 .

Из уравнений (2.7), (2.8) и условий (2.46), (2.47) получаем, что функции $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ должны удовлетворять равенству (2.20) в области $\Omega \setminus \Omega_0$ и условию

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = 0 \text{ при почти всех } \mathbf{x} \in \Omega_0. \quad (2.50)$$

Введем множества функций

$$M^0 = \left\{ \mathbf{u} \in V^0(\text{div } m; \Omega) : \text{rot } \mathbf{u}|_{\Omega_0} = 0 \right\},$$

$$M_0 = \left\{ \mathbf{u} \in V_0(\text{div } m; \Omega) : \text{rot } \mathbf{u}|_{\Omega_0} = 0 \right\}.$$

Аналогичные пространства для постановки обобщенных задач рассматривались в [75]. Пусть $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$ - решение задачи (2.5), (2.7) – (2.11), (2.17), (2.48). Умножая обе части равенства (2.20) на функцию $\text{rot } \mathbf{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\mathbf{v} \in M^0$, и интегрируя по множеству $\Omega \setminus \Omega_0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{c}{4p} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части, равен нулю в силу леммы 1.25, так как $\dot{\mathbf{E}} \in K(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{v}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$. Поэтому для всех $\dot{\mathbf{v}} \in M^0$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \text{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \text{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \frac{4p}{c} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \text{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (2.51)$$

Таким образом, система уравнений Максвелла при условиях (2.17) сводится к следующей задаче определения напряженности магнитного поля: найти функцию $\dot{\mathbf{H}} \in M^0$, для которой при всех $\dot{\mathbf{v}} \in M^0$ справедливо равенство (2.51).

Единственность решения этой задачи, которая следует из единственности решения задачи (2.51), доказана в [51].

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{H}} \in M^0$ записывается в виде

$$I(\dot{\mathbf{u}}) \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in M^0, \\ I(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \text{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \text{rot} \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} - \frac{4p}{c} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \text{rot} \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x}. \quad (2.52)$$

Пусть теперь $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$ - решение задачи (2.5), (2.7) – (2.11), (2.18), (2.48). Умножая обе части равенства (2.20) на функцию $\text{rot} \dot{\mathbf{v}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{v}} \in M_0$, и интегрируя по множеству $\Omega \setminus \Omega_0$, получаем

$$\frac{c}{4p} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \text{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \text{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \text{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части, равен нулю, так как $\dot{\mathbf{E}} \in K(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{v}} \in H(\text{rot}; \Omega)$. Поэтому для всех $\dot{\mathbf{v}} \in M_0$ справедливо (2.51).

Таким образом, система уравнений Максвелла при условиях (2.18) сводится к следующей задаче определения $\dot{\mathbf{H}}$: найти функцию $\dot{\mathbf{H}} \in M_0$, для которой при всех $\dot{\mathbf{v}} \in M_0$ выполнено равенство (2.51).

Эквивалентная вариационная задача для определения $\dot{\mathbf{H}} \in M_0$ записывается в виде

$$I(\dot{\mathbf{u}}) \rightarrow \inf, \quad \dot{\mathbf{u}} \in M_0, \quad (2.53)$$

где функционал I определяется выражением (2.52).

Теорема 2.13. Пусть $\Omega \subset R^3$ - открытая ограниченная область класса C^2 , звездная относительно некоторой точки. Тогда существует единственное решение задачи (2.52).

Доказательство. Поскольку M^0 - замкнутое подпространство в $V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, оно является гильбертовым пространством относительно индуцированного скалярного произведения, то есть

$$(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}})_0 = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Положим для $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in M^0$

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}, \quad f(\dot{\mathbf{v}}) = \frac{4p}{c} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s^{-1} \dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (2.54)$$

Очевидно, $a(\cdot, \cdot)$ - билинейная симметричная форма на M^0 , f - линейный функционал.

Непрерывность функционала f и формы $a(\cdot, \cdot)$ устанавливается применением неравенства Гельдера, коэрцитивность формы следует из неравенства (1.21). Так как выполнены все условия леммы Лакса – Мильграма, теорема доказана.

Теорема 2.14. Пусть $\Omega \subset R^3$ - открытая ограниченная область класса C^2 , звездная относительно некоторой точки. Тогда существует единственное решение задачи (4.8).

Доказательство. Очевидно, M_0 - замкнутое подпространство в $V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}})_0 = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Определим симметричную билинейную форму и линейный функционал на M_0 соотношениями (2.54), $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in M_0$. Очевидно, форма $a(\cdot, \cdot)$ и функционал f непрерывны, коэрцитивность формы следует из оценки (1.23). Так как выполнены все условия леммы Лакса – Мильграма, теорема доказана.

Соотношения (2.5), (2.6), (2.8), (2.51), позволяют однозначно определить функции $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$ во всей области Ω , функции $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{D}}$ - только в проводящей области $\Omega \setminus \Omega_0$. Для определения полей $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{D}}$ во всей области необходимо задание объемной плотности r в непроводящей подобласти Ω_0 (условие (2.48)) и привлечение уравнения (2.11).

Пусть $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (2.52) или (2.53). Определим функцию $\dot{\mathbf{E}}_1 \in \{L_2(\Omega)\}^3$ соотношением

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \frac{c}{4p} s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{E}}^{cmp}. \quad (2.55)$$

Лемма 2.3. Если $\dot{\mathbf{H}} \in M^0$ - решение задачи (2.52), то $\dot{\mathbf{E}}_1$ лежит в $K(\operatorname{rot}; \Omega \setminus \Omega_0)$.

Доказательство. Из тождества (2.51) следует, что для всех $\mathbf{\bar{v}} \in M^0$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\mathbf{\bar{E}}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{\bar{x}} = 0.$$

Пусть $y^{\mathbf{r}} \in \{D(\Omega \setminus \Omega_0)\}^3$. Тогда функция

$$y_1^{\mathbf{r}}(\mathbf{\bar{x}}) = \begin{cases} y^{\mathbf{r}}(\mathbf{\bar{x}}) & \text{при } \mathbf{\bar{x}} \in \Omega \setminus \Omega_0, \\ 0 & \text{при } \mathbf{\bar{x}} \in \Omega_0, \end{cases}$$

лежит в $\{D(\Omega)\}^3$, $\text{rot } y_1^{\mathbf{r}}(\mathbf{\bar{x}}) = 0$ при всех $\mathbf{\bar{x}} \in \Omega_0$.

Согласно лемме 1.38, найдется такая функция $j \in H_0^1(\Omega)$, что $y_1^{\mathbf{r}} = \mathbf{\bar{v}} + \text{grad } j$, где $\mathbf{\bar{v}} \in K(\text{div } m; \Omega)$. Поскольку $\text{rot } \mathbf{\bar{v}} = \text{rot } y_1^{\mathbf{r}}$, $\mathbf{\bar{v}} \in M^0$ и

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\mathbf{\bar{E}}_1 \cdot \text{rot } y^{\mathbf{r}}) d\mathbf{\bar{x}} = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\mathbf{\bar{E}}_1 \cdot \text{rot } y_1^{\mathbf{r}}) d\mathbf{\bar{x}} = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\mathbf{\bar{E}}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{\bar{x}} = 0.$$

По определению, $\text{rot } \mathbf{\bar{E}}_1 = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.4. Пусть функция $y^{\mathbf{r}} \in \{H^1(\Omega \setminus \Omega_0)\}^3$, $y^{\mathbf{r}}|_{\partial\Omega_0} = 0$. Тогда функция

$$y_1^{\mathbf{r}}(\mathbf{\bar{x}}) = \begin{cases} y^{\mathbf{r}}(\mathbf{\bar{x}}) & \text{при } \mathbf{\bar{x}} \in \Omega \setminus \Omega_0, \\ 0 & \text{при } \mathbf{\bar{x}} \in \Omega_0, \end{cases} \quad (2.56)$$

лежит в $\{H^1(\Omega)\}^3$.

Доказательство. Для $k, l=1,2,3$ определим функции $v_{lk} \in L_2(\Omega)$, продолжив нулем в Ω_0 функции $\partial_k y_l \in L_2(\Omega \setminus \Omega_0)$. При всех $j \in D(\Omega)$ имеем

$$\langle \partial_k y_l, j \rangle = - \int_{\Omega} y_l \partial_k j d\mathbf{\bar{x}} = - \int_{\Omega \setminus \Omega_0} y_l \partial_k j d\mathbf{\bar{x}} = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} j \partial_k y_l d\mathbf{\bar{x}} = \int_{\Omega} j v_{lk} d\mathbf{\bar{x}},$$

то есть $y_l \in H^1(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.5. Если $\mathbf{\bar{H}} \in M_0$ - решение задачи (2.53), то $\mathbf{\bar{E}}_1 \in K(\text{rot}; \Omega \setminus \Omega_0)$ и $(\mathbf{\bar{E}}_1)_t|_{\partial\Omega} = 0$.

Доказательство. Из тождества (2.51) следует, что для всех $\mathbf{\bar{v}} \in M_0$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\mathbf{\bar{E}}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{\bar{v}}) d\mathbf{\bar{x}} = 0.$$

Пусть $y^{\mathbf{r}} \in \{H^1(\Omega \setminus \Omega_0)\}^3$, $y^{\mathbf{r}}|_{\partial\Omega_0} = 0$, функция $y_1^{\mathbf{r}} \in \{H^1(\Omega)\}^3$, определена соотношением (2.56), $\text{rot } y_1^{\mathbf{r}}(\mathbf{\bar{x}}) = 0$ при всех $\mathbf{\bar{x}} \in \Omega_0$.

Согласно лемме 1.39, $y_1^{\mathbf{r}} = \mathbf{\bar{v}} + \mathbf{\bar{g}}$, где $\mathbf{\bar{v}} \in K_0(\text{div } m; \Omega)$, $\mathbf{\bar{g}} \in K(\text{rot}; \Omega)$. Так как $\text{rot } \mathbf{\bar{v}} = \text{rot } y_1^{\mathbf{r}}$, то $\mathbf{\bar{v}} \in M_0$ и

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\dot{E}_1 \cdot \operatorname{rot} \dot{y}^{\mathbf{r}}) d\dot{x}^{\mathbf{r}} = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\dot{E}_1 \cdot \operatorname{rot} \dot{y}_1^{\mathbf{r}}) d\dot{x}^{\mathbf{r}} = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\dot{E}_1 \cdot \operatorname{rot} \dot{v}^{\mathbf{r}}) d\dot{x}^{\mathbf{r}} = 0.$$

По теореме 1.9, $\operatorname{rot} \dot{E}_1 = 0$, $(\dot{E}_1)_t|_{\partial\Omega} = 0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.6. ([51]) Пусть функция $\tilde{h} \in H_0^1(\Omega_0)$. Тогда функция

$$h(\dot{x}^{\mathbf{r}}) = \begin{cases} \tilde{h}(\dot{x}^{\mathbf{r}}) & \text{при } \dot{x}^{\mathbf{r}} \in \Omega_0, \\ 0 & \text{при } \dot{x}^{\mathbf{r}} \in \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases} \quad (2.57)$$

содержится в $H_0^1(\Omega)$.

Предположим теперь, что существует функция $\dot{E}_0 \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$ такая, что $\dot{E}_0(\dot{x}^{\mathbf{r}}) = \dot{E}_1(\dot{x}^{\mathbf{r}})$ при почти всех $\dot{x}^{\mathbf{r}} \in \Omega \setminus \Omega_0$.

Лемма 2.7. Существует единственная функция $\tilde{h} \in H_0^1(\Omega_0)$, удовлетворяющая при всех $w \in H_0^1(\Omega_0)$ равенству

$$\int_{\Omega_0} (e \operatorname{grad} \tilde{h} \cdot \operatorname{grad} w) d\dot{x}^{\mathbf{r}} + \int_{\Omega_0} (e \dot{E}_0 \cdot \operatorname{grad} w) d\dot{x}^{\mathbf{r}} = -4p \int_{\Omega_0} r_0 w d\dot{x}^{\mathbf{r}}.$$

Доказательство. Положим в лемме Лакса – Мильграма $H = H_0^1(\Omega)$,

$$a(j, w) = \int_{\Omega_0} (e \operatorname{grad} j \cdot \operatorname{grad} w) d\dot{x}^{\mathbf{r}}, \quad f(w) = -4\pi \int_{\Omega_0} \rho_0 w d\dot{x}^{\mathbf{r}} - \int_{\Omega_0} (e \dot{E}_0 \cdot \operatorname{grad} w) d\dot{x}^{\mathbf{r}}.$$

Поскольку все условия на $a(\cdot, \cdot)$ и f , очевидно, выполнены, лемма доказана.

Определим функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ соотношением (2.57). Положим

$$\dot{E} = \dot{E}_0 + \operatorname{grad} h \in K(\operatorname{rot}; \Omega),$$

тогда справедливо (2.48) и, следовательно, $\dot{H}, \dot{B} = m\dot{H}, \dot{E}, \dot{D} = e\dot{E}, \dot{J} = s\dot{E} + \dot{J}^{cmp}$ и функционал r , определенный равенством (2.19) – решение соответствующей задачи (2.5), (2.7) – (2.11), (2.17), (2.48) или (2.5), (2.7) – (2.11), (2.18), (2.48)

Установим существование решения задач (2.5), (2.7)-(2.11), (2.48) методом слабой проводимости, предложенным в [51] и имеющем в основе следующее утверждение.

Лемма 2.8. Пусть H – гильбертово пространство, K – замкнутое подпространство H и определена функция $F: (0, \infty) \rightarrow H$ такая, что для любых $l > 0$ $F(l) \in K$ и $\|F(l) - F(n)\| \leq c \|l - n\|^a$ где $a > 0$, $c > 0$ – постоянные, не зависящие от l, n . Тогда существует элемент $F_0 \in K$ такой, что $F_0 = \lim_{l \rightarrow 0} F(l)$ и $\|F(l) - F_0\| \leq cl^a$.

Для каждого $l > 0$ рассмотрим краевую задачу

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_l = \frac{4p}{c} \dot{\mathbf{J}}_l, \quad (2.58)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}}_l = 0, \quad (2.59)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_l = 0, \quad (2.60)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}}_l = 4p r_l \quad (2.61)$$

с соответствующими условиями

$$\dot{\mathbf{B}}_l = m \dot{\mathbf{H}}_l, \quad \dot{\mathbf{D}}_l = e \dot{\mathbf{E}}_l, \quad \dot{\mathbf{J}}_l = s_l \dot{\mathbf{E}}_l + \dot{\mathbf{J}}^{cmp}, \quad (2.62)$$

где тензор s_l определен соотношением

$$s_l(\dot{\mathbf{x}}) = \begin{cases} II & \text{при } \dot{\mathbf{x}} \in \Omega_0, \\ s(\dot{\mathbf{x}}) & \text{при } \dot{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus \Omega_0, \end{cases} \quad (2.63)$$

I - единичная матрица.

Система (2.58) – (2.62) рассматривается при двух видах краевых условий:

$$\left(\dot{\mathbf{H}}_l \right)_t(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad (2.64)$$

и

$$\left(\dot{\mathbf{B}}_l \right)_n(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad \left(\dot{\mathbf{E}}_l \right)_t(\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} \in \partial\Omega \quad (2.65)$$

Решением задачи (2.58) – (2.62), (2.64) называются функции $\dot{\mathbf{H}}_l \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}}_l \in K(\operatorname{div}, \Omega)$, $\dot{\mathbf{J}}_l \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{E}}_l \in K(\operatorname{rot}, \Omega)$, $\dot{\mathbf{D}}_l \in \{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие равенствам (2.58), (2.62), и функционал $r_l \in H^{-1}(\Omega)$, действующий по формуле

$$r_l(j) = -\frac{1}{4p} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{D}}_l \cdot \operatorname{grad} j) d\dot{\mathbf{x}}, \quad j \in H_0^1(\Omega). \quad (2.66)$$

Решением задачи (2.58) – (2.62), (2.65) называются функции $\dot{\mathbf{H}}_l \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}}_l \in K(\operatorname{div}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{J}}_l \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{E}}_l \in K(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{D}}_l \in \{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие равенствам (2.58), (2.62), и функционал $r_l \in H^{-1}(\Omega)$, определенный формулой (2.66).

Согласно теоремам 2.1, 2.2 для любого $l > 0$ существуют единственные решения задач (2.58) – (2.62), (2.64) и (2.58) – (2.62), (2.65).

Лемма 2.9. ([51]) Пусть Ω , Ω_0 удовлетворяют сформулированным условиям. Тогда существует постоянная $T(\Omega, \Omega_0) > 0$, зависящая только от Ω , Ω_0 такая, что

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} y)^2 d\dot{\mathbf{x}} \leq T(\Omega, \Omega_0) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\operatorname{grad} y)^2 d\dot{\mathbf{x}} \quad (2.67)$$

для любых функций $y \in H^1(\Omega)$ таких, что

$$\int_{\Omega} (\text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi) d\mathbf{x} = 0 \text{ при всех } \varphi \in D(\Omega_0).$$

С помощью леммы 2.9 доказывается следующее утверждение.

Теорема 2.15. Для любых $g, l > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{\dot{E}}_g - \mathbf{\dot{E}}_l\|_{2,\Omega} \leq c_1 |g - l|^{1/2} \|\mathbf{J}^{cmp}\|_{2,\Omega}, \quad (2.68)$$

$$\|\mathbf{\dot{H}}_g - \mathbf{\dot{H}}_l\|_{\text{rot},\Omega} \leq c_2 |g - l|^{1/2} \|\mathbf{J}^{cmp}\|_{2,\Omega}, \quad (2.69)$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от g, l .

Доказательство. Для решения задачи (2.58) – (2.62), (2.64) утверждение доказано в [51]. Пусть $\mathbf{\dot{H}}_l, \mathbf{\dot{E}}_l$ решение задачи (2.58) – (2.62), (2.65). Поскольку, по лемме 1.32, $\mathbf{\dot{E}}_l \in K^\perp(\text{div}; \Omega)$, найдется, согласно леммам 1.30, 1.31 функция $j_l \in H_0^1(\Omega)$ такая, что

$$\mathbf{\dot{E}}_l = -\text{grad } j_l.$$

Равенство (2.58) с учетом (2.62) можно записать в виде

$$\frac{c}{4p} \text{rot } \mathbf{H}_l = -s_l \text{grad } j_l + \mathbf{J}^{cmp} \quad (2.70)$$

Пусть $y \in H_0^1(\Omega)$. Умножив обе части (2.70) на $\text{grad } y$ и проинтегрировав по Ω , получаем с учетом конкретного вида s_l :

$$l \int_{\Omega_0} (\text{grad } j_l \cdot \text{grad } y) d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s \text{grad } j_l \cdot \text{grad } y) d\mathbf{x} = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \text{grad } y) d\mathbf{x}. \quad (2.71)$$

При всех $y \in D(\Omega_0)$, следовательно, $\int_{\Omega_0} (\text{grad } \varphi_\lambda \cdot \text{grad } \psi) d\mathbf{x} = 0$ и можно применить к j_l

лемму 2.9. Взяв в (2.71) $y = j_l$, учитывая условия (2.16) и оценку (2.67), имеем

$$\int_{\Omega} (\text{grad } j_l)^2 d\mathbf{x} \leq T(\Omega, \Omega_0) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\text{grad } j_l)^2 d\mathbf{x} \leq s_1^{-2} T(\Omega, \Omega_0) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\mathbf{J}^{cmp})^2 d\mathbf{x}. \quad (2.72)$$

Пусть $0 < g < l$, тогда записав для $j_g, y \in H_0^1(\Omega)$ соотношение, аналогичное (2.71) и вычитая его из (2.71), получим

$$l \int_{\Omega_0} (\text{grad}(j_g - j_l) \cdot \text{grad } y) d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s \text{grad}(j_g - j_l) \cdot \text{grad } y) d\mathbf{x} = (l - g) \int_{\Omega_0} (\text{grad } j_g \cdot \text{grad } y) d\mathbf{x}.$$

Подставляя в последнее равенство $y = j_g - j_l$ и оценивая правую часть, находим, что

$$l \int_{\Omega_0} (\text{grad}(j_g - j_l))^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (s \text{grad}(j_g - j_l) \cdot \text{grad}(j_g - j_l)) d\mathbf{x} =$$

$$= (l-g) \int_{\Omega_0} (\text{grad } j_g \cdot \text{grad}(j_l - j_g)) d\mathbf{x} \leq (l-g) \left(\frac{t}{2} \int_{\Omega_0} (\text{grad } j_g)^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2t} \int_{\Omega_0} (\text{grad}(j_l - j_g))^2 d\mathbf{x} \right)$$

для любых $t > 0$.

Взяв $t = \frac{l-g}{2l}$, получим, учитывая (2.16) и (2.67):

$$s_1 \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (\text{grad}(j_g - j_l))^2 d\mathbf{x} \leq \frac{(l-g)^2}{4l} \int_{\Omega_0} (\text{grad } j_g)^2 d\mathbf{x} \leq \frac{(l-g)^2}{4l} s_1^{-2} T(\Omega, \Omega_0) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (J^{cmp})^2 d\mathbf{x}.$$

Применяя лемму 2.9 для функции $j_g - j_l$, окончательно имеем

$$\|\text{grad}(j_g - j_l)\|_{2,\Omega} \leq \frac{|l-g|^{1/2}}{2s_1^{3/2}} T(\Omega, \Omega_0) \|J^{cmp}\|_{2,\Omega}, \quad (2.72)$$

то есть справедливо неравенство (2.68).

Далее, для любых $0 < g < l$ из (2.70) получаем

$$\begin{aligned} \text{rot}(\dot{H}_g - \dot{H}_l) &= \frac{4p}{c} s_l (\text{grad } j_l - \text{grad } j_g) + \frac{4p}{c} (s_l - s_g) \text{grad } j_g, \\ \|\text{rot}(\dot{H}_g - \dot{H}_l)\|_{2,\Omega} &\leq \frac{4p}{c} \max\{l, s_2\} \|\text{grad}(j_l - j_g)\|_{2,\Omega} + \frac{4p}{c} |l-g| \|\text{grad } j_g\|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

В силу (2.72), (2.73),

$$\|\text{rot}(\dot{H}_g - \dot{H}_l)\|_{2,\Omega} \leq \frac{4p}{cs_1} \sqrt{T(\Omega, \Omega_0)} |l-g|^{1/2} \left(\sqrt{T(\Omega, \Omega_0)} \frac{\max\{l, s_2\}}{2s_1^{1/2}} + |l-g|^{1/2} \right) \|J^{cmp}\|_{2,\Omega}$$

Если $0 < g < l < 1$,

$$\|\text{rot}(\dot{H}_g - \dot{H}_l)\|_{2,\Omega} \leq c_3 |l-g|^{1/2} \|J^{cmp}\|_{2,\Omega},$$

$$\text{где } c_3 = \frac{4p}{cs_1} \left(T(\Omega, \Omega_0) \frac{\max\{l, s_2\}}{2s_1^{1/2}} + \sqrt{T(\Omega, \Omega_0)} \right).$$

Применяя оценку (1.22) к $\dot{H}_l - \dot{H}_g$, получим

$$\|\dot{H}_l - \dot{H}_g\|_{\text{rot},\Omega}^2 \leq \left(1 + \frac{d(\Omega) m_2}{2 m_1} \right) c_3^2 |l-g| \|J^{cmp}\|_{2,\Omega}^2,$$

то есть справедливо (2.69) и теорема доказана.

В силу леммы 2.8 существуют функции $\dot{E}_0 \in K(\text{rot}, \Omega)$ ($\dot{E}_0 \in K(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$), $\dot{H}_0 \in V^0(\text{div } \mu; \Omega)$ ($\dot{H}_0 \in V_0(\text{div } \mu; \Omega)$) такие, что

$$\|\dot{E}_l - \dot{E}_0\|_{2,\Omega} \rightarrow 0, \quad \|\dot{H}_l - \dot{H}_0\|_{2,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } l \rightarrow 0.$$

Переходя к пределу в (2.70), получаем, что $\dot{\mathbf{H}}_0, \dot{\mathbf{E}}_0$ удовлетворяют равенству

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_0 = \frac{4p}{c} (s \dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{J}}^{cmp}),$$

то есть $\dot{\mathbf{H}}_0$ - решение задачи (2.51), $\dot{\mathbf{E}}_0(\dot{\mathbf{x}}) = \dot{\mathbf{E}}_1(\dot{\mathbf{x}})$ при почти всех $\dot{\mathbf{x}} \in \Omega \setminus \Omega_0$.

Определив, далее, функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ с помощью леммы 2.7, придем к следующему утверждению:

Теорема 4.5. Функции $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0, \dot{\mathbf{B}} = m\dot{\mathbf{H}}_0, \dot{\mathbf{J}} = s\dot{\mathbf{E}}_0 + \dot{\mathbf{J}}^{cmp}, \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_0 + \operatorname{grad} h$ и $\dot{\mathbf{D}} = e\dot{\mathbf{E}}$ являются решением соответствующей задачи (2.5), (2.7) – (2.11), (2.17), (2.48) или (2.5), (2.7) – (2.11), (2.18), (2.48).

3. НЕКОТОРЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Приводятся различные обобщенные постановки начально-краевых задач для системы уравнений в частных производных, соответствующей системе Максвелла в квазистационарном приближении. Доказываются теоремы о существовании и единственности решений. Изучается связь между задачами в терминах векторного потенциала при различных калибровочных соотношениях и доказывается их эквивалентность соответствующим задачам в терминах напряженности магнитного поля. Исследуется асимптотическое поведение решений поставленных задач при $t \rightarrow \infty$.

3.1. Разрешимость начально-краевых задач и свойства решений

Система уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении записывается в гауссовой системе единиц в виде ([137]):

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, t) = 4\pi r(\mathbf{x}, t), \quad (3.4)$$

где $(\mathbf{x}, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$, $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{E}}, \mathbf{J} : Q \rightarrow R^3$ и $r : Q \rightarrow R^1$ - неизвестные функции, $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область класса C^2 , звездная относительно некоторой точки, $T > 0$ - заданное число.

Справедливы материальные соотношения (2.5), (2.6), где, как и ранее, m, s, e - самосопряженные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям (2.12)-(2.14), $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} : Q \rightarrow R^3$ - заданная суммируемая с квадратом функция.

Система (3.1) – (3.4), (2.5), (2.6) рассматривается при краевых условиях

$$\dot{\mathbf{H}}_t(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T) \quad (3.5)$$

или

$$\dot{\mathbf{B}}_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \dot{\mathbf{E}}_t(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T) \quad (3.6)$$

и начальных условиях

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.7)$$

где $\dot{\mathbf{h}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ - известная функция.

Решением задачи (3.1) – (3.5), (2.5), (2.6), (3.7) называются функции $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, H_0(\text{rot}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{B}} \in L_2(0, T, K(\text{div}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{J}} \in L_2(0, T, K(\text{div}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{E}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\dot{\mathbf{D}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\mathbf{r} \in L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))$, удовлетворяющие равенствам (2.5), (2.6), (3.1), (3.3), (3.4) и условиям (3.7) в смысле распределений на Q .

Решением задачи (3.1) – (3.4), (2.5), (2.6), (3.6), (3.7) называются функции $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{B}} \in L_2(0, T, K(\text{div}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{B}} \in L_2(0, T, K(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{E}} \in L_2(0, T, H_0(\text{rot}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{D}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\mathbf{r} \in L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ удовлетворяющие равенствам (2.5), (2.6), (3.1), (3.3), (3.4) и условиям (3.7).

Выполнение (3.4) означает, что при почти всех $t \in (0, T)$

$$\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{j} \rangle = -\frac{1}{4p} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{D}}(t) \cdot \text{grad } \mathbf{j}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{j} \in H_0^1(\Omega). \quad (3.8)$$

С помощью соотношений (2.5), (2.6), (3.3) уравнения (3.1), (3.2) можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} m \dot{\mathbf{H}} + \frac{c}{4p} \text{rot}(s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}) = \text{rot } \dot{\mathbf{E}}^{cmp}, \quad (3.9)$$

$$\text{div } m \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (3.10)$$

Теорема 3.1. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область класса C^2 , звездная относительно некоторой точки, m , s , e - самосопряженные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям (2.12)-(2.14), $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in \{L_2(Q)\}^3$, $\dot{\mathbf{h}} \in K(\text{div } m; \Omega)$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1) – (3.5), (2.5), (2.6), (3.7), при этом $\dot{\mathbf{H}}$ эквивалентна непрерывной функции из $[0, T]$ в $L_m(\Omega)$.

Доказательство. Предположим, что операторы m , s отображают $\{C^1(\Omega)\}^3$ в $\{C^1(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in \{C^1(Q)\}^3$, функция $\dot{\mathbf{H}} \in \{C^2(Q)\}^3$ удовлетворяет уравнениям (3.9), (3.10) и условиям (3.5), (3.7). Умножим равенство (3.9) на функцию $\dot{\mathbf{v}} \in \{D(\Omega)\}^3$ и проинтегрируем по Ω , используя тождество (1.5) и тот факт, что

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (m \dot{\mathbf{H}}) \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}: \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

По непрерывности равенство (3.12) выполнено для всех $\dot{\mathbf{v}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$, то условия (3.2), (3.5) означают, что $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V^0(\text{div } m; \Omega))$. Задача (3.1) – (3.5), (2.5), (2.6), (3.7) сводится, таким образом, к следующей задаче (3.5), (3.7), (3.12) определения напряженности магнитного поля: найти такую функцию $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V^0(\text{div } m; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.7), при которой для всех $\mathbf{v} \in V^0(\text{div } m; \Omega)$ справедливо равенство (3.12).

Если тождество (3.12) выполнено для всех $\mathbf{v} \in V^0(\text{div } m; \Omega)$, то из леммы 1.39 следует, что это равенство справедливо для всех $\mathbf{v} \in W^0(\text{div } m; \Omega)$. Поскольку пространство $W^0(\text{div } m; \Omega)$ непрерывно и плотно вложено в $L_m(\Omega)$, пространство $L_m^*(\Omega)$ можно отождествить с плотным подпространством в $W^{0*}(\text{div } m; \Omega)$. Отождествляя далее $L_m(\Omega)$ и $L_m^*(\Omega)$, приходим к включениям

$$W^0(\text{div } m; \Omega) \subset L_m(\Omega) \equiv L_m^*(\Omega) \subset W^{0*}(\text{div } m; \Omega),$$

при этом скалярное произведение в $L_m(\Omega)$ элементов $\mathbf{u} \in L_m(\Omega)$ и $\mathbf{v} \in W^0(\text{div } m; \Omega)$ совпадает со значением функционала $\mathbf{u}$ на элементе $\mathbf{v}$ в смысле двойственности между $W^{0*}(\text{div } m; \Omega)$ и $W^0(\text{div } m; \Omega)$.

Для функции $\mathbf{w} \in L_m(\Omega)$ через $\mathbf{f}(\mathbf{w})$ обозначим элемент из $W^*(\text{div } m; \Omega)$ такой, что

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{w}), \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{w} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in W(\text{div } m; \Omega).$$

Равенство (3.12) тогда означает, что

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{H}}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \mathbf{f} \left(\mathbf{E}^{cmp} - \frac{c}{4p} s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} \right), \mathbf{v} \right\rangle$$

для всех $\mathbf{v} \in W^0(\text{div } m; \Omega)$, если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V^0(\text{div } m; \Omega))$.

Таким образом, если $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.12), (3.5), то

$$\dot{\mathbf{H}}' = -\frac{c^2}{4p} \mathbf{f}(s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}) + c \mathbf{f}(\mathbf{E}^{cmp}), \quad (3.13)$$

$\dot{\mathbf{H}}' \in L_2(0, T, W^{0*}(\text{div } m; \Omega))$ и функция $\dot{\mathbf{H}}$ эквивалентна непрерывной функции из $[0, T]$ в $W^{0*}(\text{div } m; \Omega)$.

Начальное условие (3.7), таким образом, имеет смысл.

Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W^0(\text{div } m; \Omega))$ - решение задачи (3.12), (3.7).

Обозначим $\mathbf{\dot{Y}}(t) = \int_0^t \mathbf{\dot{H}}(s) ds$, $\mathbf{\dot{R}}(t) = \int_0^t \mathbf{\dot{E}^{cmp}}(s) ds$ и проинтегрируем равенство (3.12), где $\mathbf{\dot{v}}$

лежит в $V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ от 0 до t , учитывая (3.7):

$$\frac{1}{c} \int_{\Omega} (m \mathbf{\dot{H}} \cdot \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\dot{Y}}(t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{\dot{R}}(t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} (m \mathbf{\dot{h}} \cdot \mathbf{\dot{v}}) d\mathbf{x}.$$

Пусть $\mathbf{y} \in \{D(Q)\}^3$. Согласно лемме Лакса-Мильграма, при $t \in (0, T)$ найдется такая функция $j(t) \in H_0^1(\Omega)$, что для всех $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (m \mathbf{y}(t) \cdot \operatorname{grad} w) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (m \operatorname{grad} j(t) \cdot \operatorname{grad} w) d\mathbf{x}.$$

Тогда $\mathbf{\dot{v}}(t) = \mathbf{y}(t) - \operatorname{grad} j(t) \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и

$$\frac{1}{c} \int_{\Omega} (m \mathbf{\dot{H}}(t) \cdot \mathbf{y}(t)) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\dot{Y}}(t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{y}(t)) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{\dot{R}}(t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{y}(t)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (m \mathbf{\dot{h}} \cdot \mathbf{y}(t)) d\mathbf{x},$$

следовательно, справедливо в смысле распределений на Q равенство

$$\frac{1}{c} m \mathbf{\dot{H}} + \frac{c}{4p} \operatorname{rot} s^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{\dot{Y}} = \operatorname{rot} \mathbf{\dot{R}} + m \mathbf{\dot{h}}, \quad (3.14)$$

дифференцируя которое, получим (3.9).

Для доказательства существования решения задачи (3.7), (3.12) положим $V = V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $H = K(\operatorname{div} m; \Omega)$ - сепарабельные гильбертовы пространства, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_H = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_m$, V непрерывно и плотно вложено в H по лемме 1.40. Определим симметричную билинейную форму $a(\cdot, \cdot)$ на V и функцию $f : (0, T) \rightarrow V^*$ соотношениями

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega), \quad (3.15)$$

$$\langle f(t), \mathbf{v} \rangle = c \int_{\Omega} (\mathbf{\dot{E}^{cmp}}(t) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{x}$$

для $\mathbf{v} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и почти всех $t \in (0, T)$.

Непрерывность формы $a(\cdot, \cdot)$ следует из леммы 1.33. Применяя лемму 1.44 для $h = m$,

$\mathbf{u} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ получаем, что форма a коэрцитивна с константой $a_1 = \frac{1}{2s_2} \min \left\{ 1, \frac{2m_1^2}{d^2 m_2^2} \right\}$,

где $d = d(\Omega)$ - диаметр области Ω .

Из неравенства Гельдера находим для $\mathbf{v} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$

$$|\langle f, \mathbf{v} \rangle| \leq c \|\mathbf{\dot{E}^{cmp}}\|_{2,Q} \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{2,Q} \leq c \|\mathbf{\dot{E}^{cmp}}\|_{2,Q} \|\mathbf{v}\|_{L_2(0,T,V)},$$

то есть $f \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$.

Таким образом, задача (3.12), (3.7) имеет вид (1.2), (1.3) и из теоремы 1.2 следует существование единственного решения $\dot{H} \in C(0, T, K(\operatorname{div} m; \Omega)) \subset C(0, T, L_m(\Omega))$.

Положим далее $\dot{B} = m\dot{H}$, $\dot{J} = \frac{4p}{c} \operatorname{rot} \dot{H}$, $\dot{E} = s^{-1} \dot{J} - \dot{E}^{cmp}$, $\dot{D} = e\dot{E}$ и определим r соотношением (3.8). $\dot{H} \in L_2(0, T, H_0(\operatorname{rot}; \Omega))$, $\dot{B} \in L_2(0, T, K(\operatorname{div}; \Omega))$ по определению пространства $V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{J} \in L_2(0, T, K(\operatorname{div}; \Omega))$, $\dot{E} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\dot{D} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $r \in L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ и выполнены соотношения (2.5), (2.6), (3.1), (3.4) по построению. Равенство (3.3) следует из (3.9). Таким образом, $\dot{H}$, $\dot{B}$, $\dot{J}$, $\dot{E}$, $\dot{D}$, r - решение задачи (3.1) – (3.5), (2.5), (2.6), (3.7).

Используя теоремы 1.3, 1.4, приходим к следующему утверждению о свойствах решения задачи (3.12), (3.7).

Лемма 3.1. Если $\dot{H} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.12), (3.7), где $\dot{E}^{cmp} \in L_2(0, T, H(\operatorname{rot}; \Omega))$, $\dot{h} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, то $\dot{H}' \in L_2(0, T, L_m(\Omega))$.

Теорема 3.2. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область класса C^2 , звездная относительно некоторой точки, m , s , e - самосопряженные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям (2.12)-(2.14), $\dot{E}^{cmp} \in L_2(0, T, H(\operatorname{rot}; \Omega))$, $\dot{h} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Тогда существует единственное решение задачи (3.1) – (3.4), (3.6), (2.5), (2.6), (3.7), при этом $\dot{H}$ эквивалентна непрерывной функции из $[0, T]$ в $L_m(\Omega)$.

Доказательство. Предположим, что операторы m , s отображают $\{C^1(\Omega)\}^3$ в $\{C^1(\Omega)\}^3$, $\dot{E}^{cmp} \in \{C^1(Q)\}^3$, функция $\dot{H} \in \{C^2(Q)\}^3$ удовлетворяет уравнениям (3.9), (3.10) и условиям (3.6), (3.7). Умножим (3.1) на функцию $s^{-1} \operatorname{rot} \dot{v}$, $\dot{v} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и проинтегрируем по Ω , учитывая (2.6):

$$\frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{E}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} \int_{\Omega} (\dot{E} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x}.$$

Ввиду (3.3), $\int_{\Omega} (\dot{E} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{E} \cdot \dot{v}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m\dot{H} \cdot \dot{v}) d\mathbf{x}$, то есть справедливо равенство (3.12) для всех $\dot{v} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$, то условия (3.6), (3.9) означают, что $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$. Задача (3.1) – (3.4), (2.5), (2.6), (3.6), (3.7) допускает следующую постановку для $\dot{\mathbf{H}}$: найти такую функцию $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.7), что при всех $\mathbf{v} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ справедливо (3.12).

Если тождество (3.12) выполнено для всех $\mathbf{v} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$, то из леммы 1.37 следует, что это равенство справедливо для всех $\mathbf{v} \in W_0(\text{div } m; \Omega)$.

Положим теперь $V = V_0(\text{div } m; \Omega)$, $H = K_0(\text{div } m; \Omega)$, билинейную форму $a(\cdot, \cdot)$ и функционал $f(t)$ на V определяем соотношениями (3.15), где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$.

Непрерывность и коэрцитивность формы $a(\cdot, \cdot)$, непрерывность функционала $f(t)$ следуют из леммы 1.44. Применяя теорему 1.2, получаем, что существует единственная функция $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$, удовлетворяющая начальному условию (3.7) и тождеству (3.12) при всех $\mathbf{v} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$, причем $\dot{\mathbf{H}} \in C(0, T, L_m(\Omega))$.

Поскольку пространство $W_0(\text{div } m; \Omega)$ непрерывно и плотно вложено в $L_m(\Omega)$, пространство $L_m^*(\Omega)$ можно отождествить с плотным подпространством в $W_0^*(\text{div } m; \Omega)$. Отождествляя далее $L_m(\Omega)$ и $L_m^*(\Omega)$, приходим к включениям

$$W_0(\text{div } m; \Omega) \subset L_m(\Omega) \equiv L_m^*(\Omega) \subset W_0^*(\text{div } m; \Omega),$$

при этом скалярное произведение в $L_m(\Omega)$ элементов $\mathbf{u} \in L_m(\Omega)$ и $\mathbf{v} \in W_0(\text{div } m; \Omega)$ совпадает со значением функционала $\mathbf{u}$ на элементе $\mathbf{v}$ в смысле двойственности между $W_0^*(\text{div } m; \Omega)$ и $W_0(\text{div } m; \Omega)$.

Если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$, то равенство (3.12) означает, что

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{H}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \mathbf{f} \left(\mathbf{E}^{cmp} - \frac{c}{4p} s^{-1} \text{rot } \mathbf{H} \right), \mathbf{v} \right\rangle$$

для всех $\mathbf{v} \in W_0(\text{div } m; \Omega)$.

Таким образом, если $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.12), (3.5), то справедливо равенство (3.13), $\dot{\mathbf{H}}' \in L_2(0, T, W_0^*(\text{div } m; \Omega))$ и, следовательно, $\dot{\mathbf{H}} \in C(0, T, W_0^*(\text{div } m; \Omega))$.

Проинтегрируем равенство (3.12), где $\mathbf{v}$ лежит в $V_0(\text{div } m; \Omega)$, от 0 до t , учитывая (3.7):

$$\frac{1}{c} \int_{\Omega} (m \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \text{rot } \mathbf{Y}(t) \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{R}(t) \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \frac{1}{c} \int_{\Omega} (m \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x}.$$

Пусть $\mathbf{y}^{\mathbf{r}} \in \{D(Q)\}^3$. Согласно лемме Лакса-Мильграма, при $t \in (0, T)$ найдется такая функция $\mathbf{z}^{\mathbf{r}} \in K(\text{rot}; \Omega)$, что для всех $\mathbf{w}^{\mathbf{r}} \in K(\text{rot}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (m \mathbf{y}^{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{w}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (m \mathbf{z}^{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{w}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x}.$$

Тогда $\mathbf{y}^{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{z}^{\mathbf{r}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ и, следовательно, справедливо (3.14), дифференцируя которое, получим (3.9).

Положим далее $\dot{\mathbf{B}} = m \dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{J}} = \frac{4p}{c} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{E}} = s^{-1} \dot{\mathbf{J}} - \dot{\mathbf{E}}^{cmp}$, $\dot{\mathbf{D}} = e \dot{\mathbf{E}}$ и определим r соотношением (3.8). $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{B}} \in L_2(0, T, K(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega))$ по определению пространства $V_0(\text{div } m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{J}} \in L_2(0, T, K(\text{div}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{E}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\dot{\mathbf{D}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $r \in L_2(0, T, H^{-1}(\Omega))$ и выполнены соотношения (2.5), (2.6), (3.1), (3.4) по построению.

Согласно теоремам 1.3, 1.4, $\dot{\mathbf{H}}' \in L_2(0, T, L_m(\Omega))$, поэтому $\dot{\mathbf{B}}' \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$. Поскольку из равенства (3.9) следует (3.3), $\dot{\mathbf{E}} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$. Согласно (3.12), для всех $\mathbf{v}^{\mathbf{r}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \mathbf{v}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x}.$$

Пусть $\mathbf{w}^{\mathbf{r}} \in H(\text{rot}; \Omega)$. Тогда, ввиду леммы 1.39 $\mathbf{w}^{\mathbf{r}} = \mathbf{v}^{\mathbf{r}} + \mathbf{g}^{\mathbf{r}}$, где $\mathbf{v}^{\mathbf{r}} \in K_0(\text{div } m; \Omega)$, $\mathbf{g}^{\mathbf{r}} \in K(\text{rot}; \Omega) \cap H(\text{rot}; \Omega)$, и так как $\text{rot } \mathbf{v}^{\mathbf{r}} = \text{rot } \mathbf{w}^{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v}^{\mathbf{r}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$. Находим, что

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{w}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{g}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \mathbf{v}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \mathbf{w}^{\mathbf{r}}) d\mathbf{x},$$

то есть, по теореме 1.9, $\dot{\mathbf{E}} \in L_2(0, T, H_0(\text{rot}; \Omega))$.

Таким образом, $\dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$, r - решение задачи (3.1) – (3.4), (2.5), (2.6), (3.6), (3.7).

Теорема 3.3. Пусть $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in C^1(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$. Тогда решение задачи (5.12), (5.7), (5.5) лежит в классе $C_w^1(d, T, L_m(\Omega)) \cap C(d, T, V^0(\text{div } m; \Omega))$ для любого $d \in (0, T)$. Если при этом $\dot{\mathbf{h}} \in V^0(\text{div } m; \Omega)$ и $s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{h}} \in H(\text{rot}; \Omega)$, то $\dot{\mathbf{H}} \in C_w^1(0, T, L_m(\Omega)) \cap C(0, T, V^0(\text{div } m; \Omega))$.

Теорема 3.4. Пусть $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in C^1(0, T, H_0(\text{rot}; \Omega))$. Тогда решение задачи (3.12), (3.7), (3.6) лежит в классе $C_w^1(d, T, L_m(\Omega)) \cap C(d, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$ для любого $d \in (0, T)$. Если при этом $\dot{\mathbf{h}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ и $s^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{h}} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, то $\dot{\mathbf{H}} \in C_w^1(0, T, L_m(\Omega)) \cap C(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$.

Сформулируем задачи определения функции $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W(\operatorname{div} m; \Omega))$, условие соленоидальности (3.10) для решения которых экспоненциально устойчиво:

найти такую функцию $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.7), что для всех $\mathbf{v} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ выполнено равенство

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}} \operatorname{div} m \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{E}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{x}; \quad (3.16)$$

найти такую функцию $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.7), что для всех $\mathbf{v} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ выполнено равенство (3.16).

Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W(\operatorname{div} m; \Omega))$. Определим функцию $\mathbf{g}_H \in L_2(0, T, W^*(\operatorname{div} m; \Omega))$ соотношением

$$\langle \mathbf{g}_H(t), \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}}(t) \operatorname{div} m \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in W(\operatorname{div} m; \Omega), \quad t \in (0, T).$$

Тогда равенство (3.16) примет вид

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{H}, \mathbf{v} \rangle + \frac{c}{4p} \langle \mathbf{f}(s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}), \mathbf{v} \rangle + k \langle \mathbf{g}_H, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}(\mathbf{E}^{cmp}), \mathbf{v} \rangle,$$

где $\mathbf{v} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ или $W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Таким образом, если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ удовлетворяет равенству (3.16) при всех $\mathbf{v} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, то, согласно лемме 1.8,

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}' + \frac{c}{4p} \mathbf{f}(s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}) + k \mathbf{g}_H = \mathbf{f}(\mathbf{E}^{cmp}) \quad (3.17)$$

и $\dot{\mathbf{H}}$ почти всюду равна непрерывной функции из $[0, T]$ в $W^{0*}(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Если функция $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega))$ удовлетворяет равенству (3.16) при всех $\mathbf{v} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, то (3.17) справедливо в смысле функционалов на $W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и $\dot{\mathbf{H}}$ почти всюду равна непрерывной функции из $[0, T]$ в $W_0^*(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Теорема 3.5. Существует единственное решение $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ задачи (3.7), (3.16), при этом, если $\dot{\mathbf{h}}_0$ - проекция в $L_m(\Omega)$ функции $\dot{\mathbf{h}}$ на $K(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{H}}_0 \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.12) с начальным условием $\dot{\mathbf{H}}_0(0) = \dot{\mathbf{h}}_0$, то справедливы оценки

$$\|\dot{\mathbf{H}}(t) - \dot{\mathbf{H}}_0(t)\|_{2, \Omega} \leq \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \exp\left(-6 \frac{ckm_2}{d^2} t\right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{h}}_0\|_{2, \Omega}, \quad (3.18)$$

$$\left\| \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}_0 \right\|_{L_2(0,T,W)}^2 \leq \frac{1}{2ck} \left(m_2 + \frac{d^2}{6m_1} - \frac{d^2}{6m_1} \exp \left\{ -\frac{12ckm_2}{d^2} T \right\} \right) \left\| \dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{h}}_0 \right\|_{2,\Omega}^2. \quad (3.19)$$

Доказательство. Положим в теореме 1.2 $V = W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $H = L_m(\Omega)$ - сепарабельные гильбертовы пространства, V непрерывно и плотно вложено в H . Билинейную форму на V и линейный функционал $\dot{f} \in L_2(0, T, V^*)$ определяем соотношениями

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + ck \int_{\Omega} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x}, \quad (3.20)$$

$$\langle f(t), \dot{\mathbf{v}} \rangle = c \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp}(t) \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}, \quad (3.21)$$

где $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $t \in (0, T)$.

Очевидно, f - непрерывный функционал, $a(\cdot, \cdot)$ - симметричная и непрерывная форма. Применим к $\dot{\mathbf{u}} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ оценку (1.20):

$$\left\| \dot{\mathbf{u}} \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{2d^2}{m_1^2} \max(1, m_2^2) (\left\| \operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}} \right\|_{2,\Omega}^2 + \left\| \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \right\|_{2,\Omega}^2),$$

тогда форма $a(\cdot, \cdot)$ коэрцитивна с константой $a_1 = \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{m_1^2 c}{2d^2} \min \{1, m_2^{-2}\} \min \left\{ \frac{c}{4p s_2}, k \right\} \right\}$.

Применяя теорему 1.2, получаем, что задача (3.16), (3.7) имеет единственное решение в классе $L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$.

Пусть $\dot{\mathbf{h}}_0$ - проекция в $L_m(\Omega)$ функции $\dot{\mathbf{h}}$ на $K(\operatorname{div} m; \Omega)$. Тогда если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.16), (3.7), то $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 + \dot{\mathbf{H}}_1$, где $\dot{\mathbf{H}}_0 \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$, $\dot{\mathbf{H}}_1 \in L_2(0, T, K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решения задач

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_0 \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = c \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \text{ для всех } \dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega),$$

$$\dot{\mathbf{H}}_0(0) = \dot{\mathbf{h}}_0;$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}}_1 \operatorname{div} m \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = 0 \text{ для всех } \dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}, \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} m; \Omega),$$

$$\dot{\mathbf{H}}_1(0) = \dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{h}}_0.$$

Согласно лемме 1.8, $\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}_1' + k \dot{\mathbf{g}}_{H_1} = 0$, то есть, ввиду леммы 1.10,

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} (\operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}}_1)^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (3.22)$$

Применяя оценку (п.17) к функциям $\dot{H}_1(t)$, $m\dot{H}_1(t)$ получаем, что из (3.22) следуют неравенства

$$k \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} m\dot{H}_1)^2 d\mathbf{x} dt \leq \frac{1}{2c} \int_{\Omega} (m\dot{h}_1 \cdot \dot{h}_1) d\mathbf{x},$$

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m\dot{H}_1 \cdot \dot{H}_1) d\mathbf{x} + \frac{6km_2}{d^2} \int_{\Omega} (m\dot{H}_1 \cdot \dot{H}_1) d\mathbf{x} \leq 0.$$

Обозначим $y(t) = \int_{\Omega} (m\dot{H}_1 \cdot \dot{H}_1)(t) d\mathbf{x}$, $a = \frac{12ckm_2}{d^2}$. Тогда $y' + ay \leq 0$ и, следовательно,

$y(t) \leq e^{-at} y(0)$, то есть, справедлива оценка (3.18).

Поскольку $\operatorname{div} m\dot{H} = \operatorname{div} m\dot{H}_1$, $\operatorname{rot} \dot{H} = \operatorname{rot} \dot{H}_0$, получаем неравенство

$$\|\operatorname{div} m\dot{H}\|_{2,Q}^2 \leq \frac{m_2}{2ck} \|\dot{h} - \dot{h}_0\|_{2,\Omega}^2, \quad (3.23)$$

то есть справедливо (3.19).

Следствие. Пусть $\dot{H} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.7), (3.16). Если $\dot{h} \in K(\operatorname{div} m; \Omega)$, справедливо включение $\dot{H} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$.

Теорема 3.6. Существует единственное решение $\dot{H} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega))$ задачи (3.7), (3.20), при этом, если $\dot{h}_0$ - проекция в $L_m(\Omega)$ функции $\dot{h}$ на $K_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{H}_0 \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.12) с начальным условием $\dot{H}_0(0) = \dot{h}_0$, то справедливы оценки

$$\|\dot{H}(t) - \dot{H}_0(t)\|_{2,\Omega} \leq \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{ckm_2}{T(\Omega)} t \right) \|\dot{h} - \dot{h}_0\|_{2,\Omega}, \quad (3.24)$$

$$\|\dot{H} - \dot{H}_0\|_{L_2(0,T,W)}^2 \leq \frac{1}{2ck} \left(m_2 + \frac{T(\Omega)}{m_1} - \frac{T(\Omega)}{m_1} \exp\left\{ -\frac{2ckm_2}{T(\Omega)} T \right\} \right) \|\dot{h} - \dot{h}_0\|_{2,\Omega}^2. \quad (3.25)$$

где $T(\Omega)$ - константа из неравенства Пуанкаре.

Доказательство. Положим в теореме 1.2 $V = W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $H = L_m(\Omega)$ - сепарабельные гильбертовы пространства, V непрерывно и плотно вложено в H . Билинейную форму на V и линейный функционал $f \in L_2(0, T, V^*)$ определяем соотношениями (3.25), (3.26), где $\dot{u}, \dot{v} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Применяя к $\dot{\mathbf{u}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ оценку (1.22), получаем, что форма $a(\cdot, \cdot)$ коэрцитивна. Из теоремы 1.2 следует, таким образом, что задача (3.16), (3.7) имеет единственное решение в классе $L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega))$.

Пусть $\dot{\mathbf{h}}_0$ - проекция в $L_m(\Omega)$ функции $\dot{\mathbf{h}}$ на $K_0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Тогда если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.16), (3.7), то $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_0 + \dot{\mathbf{H}}_1$, где $\dot{\mathbf{H}}_0 \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} m; \Omega))$, $\dot{\mathbf{H}}_1 \in L_2(0, T, K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решения задач

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_0 \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = c \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \text{ для всех } \dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega),$$

$$\dot{\mathbf{H}}_0(0) = \dot{\mathbf{h}}_0;$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}}_1 \operatorname{div} m \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = 0 \text{ для всех } \dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}, \Omega) \cap W(\operatorname{div} m; \Omega),$$

$$\dot{\mathbf{H}}_1(0) = \dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{h}}_0.$$

Согласно лемме 1.8, $\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}_1' + k \dot{\mathbf{g}}_{H_1} = 0$, то есть, ввиду леммы 1.10,

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} (\operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}}_1)^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (3.26)$$

Применяя оценку (п.13) к функциям $\dot{\mathbf{H}}_1(t)$, $m \dot{\mathbf{H}}_1(t)$ получаем, что из (3.26) следуют неравенства

$$k \int_0^T \int_{\Omega} (\operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}}_1)^2 d\mathbf{x} dt \leq \frac{1}{2c} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{h}}_1 \cdot \dot{\mathbf{h}}_1) d\mathbf{x}, \quad \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1) d\mathbf{x} + \frac{km_2}{T(\Omega)} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1) d\mathbf{x} \leq 0,$$

Обозначим $y(t) = \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1)(t) d\mathbf{x}$, $a = \frac{2ckm_2}{T(\Omega)}$. Тогда $y' + ay \leq 0$ и, следовательно,

$y(t) \leq e^{-at} y(0)$, то есть справедлива оценка (3.24).

Поскольку $\operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{div} m \dot{\mathbf{H}}_1$, $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_0$, интегрируя (3.26), получаем далее неравенство (3.25).

Следствие. Если $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.7), (3.16), где $\dot{\mathbf{h}} \in K_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, справедливо включение $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} m; \Omega))$.

Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T_1, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.5), (3.7), (3.12). Если $T_1 > T$, $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in L_2(0, T_1, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $\dot{\mathbf{H}}_1 \in L_2(0, T_1, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.5), (3.7), (3.9)

(3.10) на интервале $(0, T_1)$, то сужение $\dot{H}_1$ на $(0, T)$ совпадает с $\dot{H}$ в силу единственности решения.

Таким образом, если $\dot{E}^{cmp} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ при всех $T > 0$, то однозначно определена удовлетворяющая начальному условию (3.7) функция $\dot{H}$, лежащая в пространстве $L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ при всех $T > 0$, такая, что при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ справедливо (3.12).

Решение задач (3.6), (3.7), (3.12) и (3.7), (3.16) продолжается аналогично.

Рассмотрим случай, когда функция $\dot{E}^{cmp}$ не зависит от t , то есть $\dot{E}^{cmp} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Пусть $\dot{H}_0 \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{B}_0$, $\dot{J}_0$, $\dot{E}_0$, $\dot{D}_0$, r_0 - решение задачи (2.5), (2.6), (2.8) – (2.11), (2.17), которое существует согласно теореме 2.1, $\dot{h} \in L_m(\Omega)$, $\dot{H} \in L_{2,loc}(0, \infty, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.7), (3.16).

Лемма 3.2. При $t \rightarrow \infty$ $\dot{H}(t)$ стремится к $\dot{H}_0$ по норме пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$, при этом справедлива оценка

$$\|\dot{H}(t) - \dot{H}_0\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \exp\left(-\frac{c}{d^2(\Omega)} \min\left\{\frac{c}{2pm_2s_2}, 6m_1k\right\}t\right) \|\dot{h} - \dot{H}_0\|_{2,\Omega}, \quad (3.27)$$

где $d(\Omega)$ - диаметр области Ω .

Если $\dot{h} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{b} = s^{-1} \operatorname{rot}(\dot{h} - \dot{H}_0) \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $x = \operatorname{div} m\dot{h} \in H_0^1(\Omega)$, то $\dot{H}(t) \rightarrow \dot{H}_0$ в $W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Доказательство. Положим $\dot{\mathbf{u}} = \dot{H} - \dot{H}_0$. Для любого $T > 0$ $\dot{\mathbf{u}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega)) \cap C(0, T, L_m(\Omega))$, при всех $\dot{\mathbf{w}} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} m\dot{\mathbf{u}} \operatorname{div} m\dot{\mathbf{w}} d\mathbf{x} = 0 \quad (3.28)$$

и выполнено начальное условие $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{h} - \dot{H}_0$.

Согласно лемме 1.36, $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_2$, где $\dot{\mathbf{u}}_1 \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega)) \cap C(0, T, L_m(\Omega))$ и при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m\dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = 0, \quad (3.29)$$

$\dot{\mathbf{u}}_2 \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)) \cap C(0, T, L_m(\Omega))$ и при всех $\dot{\mathbf{g}} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}}_2 \operatorname{div} m \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = 0. \quad (3.30)$$

Ввиду леммы 1.10,

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_2) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} (\operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}}_2)^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (3.32)$$

Применяя оценку (п.17), получим

$$\int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1)(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{2} m_2 \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x}, \quad \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{u}}_1)^2(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega) m_2}{2m_1} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x}, \quad (3.33)$$

$$\int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_2)(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{6m_1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x}, \quad \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{u}}_2)^2(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{6m_1^2} \int_{\Omega} (\operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x}. \quad (3.34)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} + \frac{c}{2pd^2(\Omega) m_2 s_2} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} &\leq 0, \\ \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_2) d\mathbf{x} + \frac{6m_1 k}{d^2(\Omega)} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} &\leq 0, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|\dot{\mathbf{u}}_1(t)\|_m^2 \leq \exp\left(-\frac{c^2}{pd^2(\Omega) m_2 s_2} t\right) \|\dot{\mathbf{u}}_1(0)\|_m^2, \quad \|\dot{\mathbf{u}}_2(t)\|_m^2 \leq \exp\left(-\frac{12cm_1 k}{d^2(\Omega)} t\right) \|\dot{\mathbf{u}}_2(0)\|_m^2.$$

Так как $\|\dot{\mathbf{u}}\|_m^2 = \|\dot{\mathbf{u}}_1\|_m^2 + \|\dot{\mathbf{u}}_2\|_m^2$, справедлива оценка (3.27).

Пусть теперь $\dot{\mathbf{b}} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\chi \in H_0^1(\Omega)$. Тогда при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}_1(0) \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x},$$

при всех $\dot{\mathbf{g}} \in W^0(\operatorname{div} m; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}}_2 \operatorname{div} m \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \chi \operatorname{div} m \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (m \operatorname{grad} \chi \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x}.$$

Согласно теореме 1.3, $\dot{\mathbf{u}} \in C_w^1(0, T, L_m(\Omega)) \cap C(0, T, W^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ для $T > 0$,

$$\|\dot{\mathbf{u}}'(t)\|_m \leq \|\dot{\mathbf{u}}'(0)\|_m.$$

Из (3.29), (3.30) получаем, что $\|\dot{\mathbf{u}}_1'(0)\|_{2,\Omega} \leq \frac{c^2}{4pm_1} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega}$, $\|\dot{\mathbf{u}}_2'(0)\|_{2,\Omega} \leq ck \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \|\operatorname{grad} \chi\|_{2,\Omega}$,

и, следовательно,

$$\|\dot{\mathbf{u}}'(t)\|_{2,\Omega} \leq \frac{c}{\sqrt{m_1}} \left(\frac{c}{4p\sqrt{m_1}} \|\text{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega} + k\sqrt{m_2} \|\text{grad} x\|_{2,\Omega} \right). \quad (3.35)$$

С другой стороны, из (3.28) находим, что

$$\int_{\Omega} (\text{rot} \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\text{div} m \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x} \leq \frac{m_2}{c} \max \left\{ \frac{4ps_2}{c}, \frac{1}{k} \right\} \|\dot{\mathbf{u}}'(t)\|_{2,\Omega} \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_{2,\Omega}.$$

Ввиду (3.33), (3.34)

$$\|\dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{m_1} \left(\frac{d^2(\Omega)}{2} m_2 \|\text{rot} \dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2 + \frac{d^2(\Omega)}{6m_1} \|\text{div} m \dot{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}^2 \right),$$

то есть

$$\|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_w^2 \leq \frac{m_2}{c} \left(1 + \frac{d^2(\Omega)}{2m_1} \max \left\{ m_2, \frac{1}{3m_1} \right\} \right) \max \left\{ \frac{4ps_2}{c}, \frac{1}{k} \right\} \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_{2,\Omega} \|\dot{\mathbf{u}}'(t)\|_{2,\Omega}, \quad (3.36)$$

откуда и следует утверждение леммы.

Пусть $\dot{\mathbf{h}} \in K(\text{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V^0(\text{div} m; \Omega))$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$, r - решение задачи (3.1) – (3.5), (2.5), (2.6), (3.7), которое существует согласно теореме 2.1.

Теорема 3.7 (о стабилизации решения). При $t \rightarrow \infty$ решение задачи (3.5), (3.7), (3.12) стремится к решению стационарной задачи (2.23) по норме пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$, при этом справедливы оценки

$$\|\dot{\mathbf{H}}(t) - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \exp \left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega)m_2s_2} t \right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}, \quad (3.37)$$

$$\|\mathbf{B}(t) - \dot{\mathbf{B}}_0\|_{2,\Omega} \leq m_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \exp \left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega)m_2s_2} t \right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}, \quad (3.38)$$

$$\int_0^t \|\dot{\mathbf{J}}(t) - \dot{\mathbf{J}}_0\|_{2,\Omega}^2 dt \leq \frac{s_2 m_2}{8p} \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}^2, \quad (3.39)$$

$$\int_0^t \|\dot{\mathbf{E}}(t) - \dot{\mathbf{E}}_0\|_{2,\Omega}^2 dt \leq \frac{m_2}{8ps_1} \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}^2, \quad (3.40)$$

$$\int_0^t \|\dot{\mathbf{D}}(t) - \dot{\mathbf{D}}_0\|_{2,\Omega}^2 dt \leq \frac{m_2 e_2}{8ps_1} \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}^2, \quad (3.41)$$

$$\int_0^t \|r(t) - r_0\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq \frac{m_2 e_2}{8ps_1} \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}^2. \quad (3.42)$$

Если $\dot{\mathbf{h}} \in V^0(\text{div} m; \Omega)$ и $\dot{\mathbf{b}} = s^{-1} \text{rot}(\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0) \in H(\text{rot}; \Omega)$, то справедливы оценки

$$\|\dot{\mathbf{H}}(t) - \dot{\mathbf{H}}_0\|_V^2 \leq \frac{s_2 m_2^{3/2}}{m_1^{3/2}} \left(1 + \frac{d^2(\Omega) m_2}{2m_1}\right) \exp\left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega) m_2 s_2} t\right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega}, \quad (3.43)$$

$$\|\dot{\mathbf{J}}(t) - \dot{\mathbf{J}}_0\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{c^2 s_2 m_2^{3/2}}{16p^2 m_1^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega) m_2 s_2} t\right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega}, \quad (3.44)$$

$$\|\dot{\mathbf{E}}(t) - \dot{\mathbf{E}}_0\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{c^2 m_2^{3/2}}{16p^2 m_1^{3/2} s_1} \exp\left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega) m_2 s_2} t\right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega}, \quad (3.45)$$

$$\|\dot{\mathbf{D}}(t) - \dot{\mathbf{D}}_0\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{c^2 e_2^2 m_2^{3/2}}{16p^2 m_1^{3/2} s_1} \exp\left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega) m_2 s_2} t\right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega}, \quad (3.46)$$

$$\|r(t) - r_0\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{ce_2 m_2^{3/4}}{4pm_1^{3/4} s_1^{1/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{4pd^2(\Omega) m_2 s_2} t\right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}^{1/2} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega}^{1/2}. \quad (3.47)$$

Доказательство. Положим $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}_0$. Для любого $T > 0$ $\dot{\mathbf{u}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$, при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = 0, \quad (3.48)$$

и начальное условие $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0$.

Поскольку, ввиду следствия из теоремы 3.5, $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.7), (3.16), оценка (3.37) установлена в лемме 3.2 при $\dot{\mathbf{u}}_2 = 0$.

Так как $\dot{\mathbf{B}} = m \dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{B}}_0 = m \dot{\mathbf{H}}_0$, из (3.36) получаем (3.37). Поскольку $\dot{\mathbf{J}}(t) = \frac{c}{4p} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}(t)$, $\dot{\mathbf{J}}_0 = \frac{c}{4p} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_0$, то $\dot{\mathbf{J}}(t) - \dot{\mathbf{J}}_0 = \frac{c}{4p} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}(t)$ и $\dot{\mathbf{E}}(t) - \dot{\mathbf{E}}_0 = s^{-1} (\dot{\mathbf{J}}(t) - \dot{\mathbf{J}}_0) = \frac{c}{4p} s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}}(t)$.

Положив в (3.48) $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}}(t)$ и проинтегрировав от 0 до t , находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(t) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p s_2} \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x} dt &\leq \frac{1}{2c} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(0) d\mathbf{x}, \\ \frac{1}{2c} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(t) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p s_1} \int_0^t \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x} dt &\leq \frac{1}{2c} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(0) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

то есть справедливы неравенства (3.39) и (3.40). Оценки (3.41) и (3.42) следуют из (3.40),

так как $\|r(t) - r_0\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\dot{\mathbf{D}}(t) - \dot{\mathbf{D}}_0\|_{2,\Omega}$.

Если $\dot{\mathbf{h}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ и $s^{-1} \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0) \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, то из леммы 3.2 следует, что

$$\|\dot{\mathbf{u}}'(t)\|_{2,\Omega} \leq \frac{c^2}{4pm_1} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{b}}\|_{2,\Omega},$$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x} \leq \frac{4p s_2 m_2}{c^2} \|\dot{\mathbf{u}}'(t)\|_{2,\Omega} \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_{2,\Omega},$$

$$\|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_V^2 \leq \frac{4p s_2 m_2}{c^2} \left(1 + \frac{d^2(\Omega) m_2}{2m_1} \right) \|\dot{\mathbf{u}}(t)\|_{2,\Omega} \|\dot{\mathbf{u}}'(t)\|_{2,\Omega},$$

то есть справедливы оценки (3.43) – (3.47).

Пусть теперь $\dot{\mathbf{H}}_0 \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{B}}_0$, $\dot{\mathbf{J}}_0$, $\dot{\mathbf{E}}_0$, $\dot{\mathbf{D}}_0$, r_0 - решение задачи (2.5), (2.6), (2.8)–(2.11), (2.18), которое существует согласно теореме 2.2, $\dot{\mathbf{h}} \in L_m(\Omega)$, $\dot{\mathbf{H}} \in L_{2,loc}(0, \infty, W_0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.7), (3.16).

Лемма 3.3. При $t \rightarrow \infty$ функция $\dot{\mathbf{H}}(t)$ стремится к $\dot{\mathbf{H}}_0$ по норме пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$, при этом справедлива оценка

$$\|\dot{\mathbf{H}}(t) - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \exp\left(-c \min\left\{\frac{c}{2d^2(\Omega) p m_2 s_2}, \frac{m_1 k}{T(\Omega)}\right\} t\right) \|\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0\|_{2,\Omega}, \quad (3.49)$$

где $d(\Omega)$ - диаметр области Ω , $T(\Omega)$ - константа из неравенства Пуанкаре.

Если $\dot{\mathbf{h}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{b}} = s^{-1} \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0) \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\chi = \operatorname{div} m \dot{\mathbf{h}} \in H^1(\Omega)$, то $\dot{\mathbf{H}}(t) \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_0$ в $W^0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Доказательство. Положим $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}_0$. Для любого $T > 0$ $\dot{\mathbf{u}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega)) \cap C(0, T, L_m(\Omega))$, при всех $\dot{\mathbf{w}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ справедливо равенство (5.28) и выполнено начальное условие $\dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0$.

Согласно лемме 1.40, $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_2$, где $\dot{\mathbf{u}}_1 \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} m; \Omega)) \cap C(0, T, L_m(\Omega))$ и при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ справедливо равенство (3.29), $\dot{\mathbf{u}}_2 \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} m; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega))$ и при всех $\dot{\mathbf{g}} \in W_0(\operatorname{div} m; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$ выполнено (3.30).

Ввиду леммы 1.10 справедливы равенства (3.31) и (3.32).

Применяя оценку (п.14), получим

$$\int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1)(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{2} m_2 \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x}, \quad \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_2)(t) d\mathbf{x} \leq \frac{T(\Omega)}{m_1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} m \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x}. \quad (3.50)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} + \frac{c}{2p d^2(\Omega) m_2 s_2} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} \leq 0,$$

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \dot{\mathbf{u}}_2) d\mathbf{x} + \frac{m_1 k}{T(\Omega)} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{u}}_1 \cdot \dot{\mathbf{u}}_1) d\mathbf{x} \leq 0,$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{u}_1(t)\|_m^2 \leq \exp\left(-\frac{c^2}{pd^2(\Omega)m_2s_2}t\right)\|\mathbf{u}_1(0)\|_m^2, \quad \|\mathbf{u}_2(t)\|_m^2 \leq \exp\left(-\frac{2cm_1k}{T(\Omega)}t\right)\|\mathbf{u}_2(0)\|_m^2.$$

Так как $\|\mathbf{u}\|_m^2 = \|\mathbf{u}_1\|_m^2 + \|\mathbf{u}_2\|_m^2$, справедлива оценка (3.49).

Пусть теперь $\mathbf{b} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\mathbf{x} \in H^1(\Omega)$. Тогда при всех $\mathbf{v} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (s^{-1} \text{rot } \mathbf{u}_1(0) \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x},$$

при всех $\mathbf{g} \in W_0(\text{div } m; \Omega) \cap K(\text{rot}; \Omega)$

$$\int_{\Omega} \text{div } m \mathbf{u}_2 \text{ div } m \mathbf{g} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{x} \text{ div } m \mathbf{g} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (m \text{ grad } \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}) d\mathbf{x}.$$

Согласно теореме 1.3, $\mathbf{u} \in C^1(0, T, L_m(\Omega))$, для $T > 0$, $\|\mathbf{u}'(t)\|_m \leq \|\mathbf{u}'(0)\|_m$ и справедливо неравенство (3.35).

Используя (3.28) находим, что

$$\int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{u})^2(t) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\text{div } m \mathbf{u})^2(t) d\mathbf{x} \leq \frac{m_2}{c} \max\left\{\frac{4ps_2}{c}, \frac{1}{k}\right\} \|\mathbf{u}'(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}.$$

Ввиду (3.50),

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{m_1} \left(\frac{d^2(\Omega)}{2} m_2 \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 + \frac{T(\Omega)}{m_1} \|\text{div } m \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \right),$$

то есть

$$\|\mathbf{u}(t)\|_w^2 \leq \frac{m_2}{c} \left(1 + \frac{1}{m_1} \max\left\{\frac{d^2(\Omega)m_2}{2}, \frac{T(\Omega)}{m_1}\right\} \right) \max\left\{\frac{4ps_2}{c}, \frac{1}{k}\right\} \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}'(t)\|_{2,\Omega},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$, $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{D}}$, $\mathbf{r}$ - решение задачи (3.1) – (3.4), (2.5), (2.6), (3.6), (3.7), которое существует согласно теореме 3.2.

Теорема 3.8. При $t \rightarrow \infty$ решение задачи (3.6), (3.7), (3.12) стремится к решению стационарной задачи (2.24) по норме пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$, при этом справедливы оценки (3.39) – (3.42). Если $\dot{\mathbf{h}} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ и $\dot{\mathbf{b}} = s^{-1} \text{rot}(\dot{\mathbf{h}} - \dot{\mathbf{H}}_0) \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, то справедливы неравенства (3.43) – (3.47).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.7 положим $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{H}}_0$. Для любого $T > 0$ $\mathbf{u} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$, при всех $\mathbf{v} \in V_0(\text{div } m; \Omega)$ справедливо равенство (3.48). Утверждение теоремы следует тогда из леммы 3.3, где $\mathbf{u}_2 = 0$.

5.2. Изучение соответствующих задач с использованием векторного и скалярного потенциалов

Введем векторный магнитный потенциал $\dot{\mathbf{A}}$ и скалярный электрический потенциал j по формулам

$$\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}, \quad \dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } j - \frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\mathbf{A}}}{\partial t}. \quad (3.51)$$

Возможность такого представления $\dot{\mathbf{B}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ следует, ввиду лемм 1.24, 1.26 из равенств (3.2) и (3.3), поскольку $\text{rot } \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \dot{\mathbf{B}}$ в смысле распределений на Q .

Уравнение (3.1) с учетом (2.5), (2.6) запишется в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} s \dot{\mathbf{A}} + \frac{c}{4\pi} \text{rot } m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} = -s \text{ grad } j + \dot{\mathbf{J}}^{cmp}. \quad (3.52)$$

Граничные условия, соответствующие (3.5) и (3.6), имеют вид

$$(m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}})_t(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T). \quad (3.53)$$

$$(\text{rot } \dot{\mathbf{A}})_n(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \dot{\mathbf{A}}_t(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\text{grad } j)_t(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{A}}_t(\mathbf{x}, t), \quad \dot{\mathbf{x}} \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T). \quad (3.54)$$

Уравнение (3.52) дополняется начальными условиями

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad (3.55)$$

где $\dot{\mathbf{a}} \in L_s(\Omega)$ - заданная функция.

Решением задачи (3.52), (3.53), (3.55) называем функции $j \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$ такие, что $m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, H_0(\text{rot}; \Omega))$, справедливы равенство (3.52) в смысле распределений на Q и условие (3.55).

Решением задачи (3.52), (3.54), (3.55) называем функции $j \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, H(\text{rot}; \Omega))$ такие, что справедливы условие (3.55), равенство (3.52) в смысле распределений на Q и условия (3.54) в смысле теории следов.

Предположим, что операторы m , s отображают $\{C^1(\Omega)\}^3$ в $\{C^1(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \in \{C^1(Q)\}^3$, $\dot{\mathbf{a}} \in \{C^2(Q)\}^3$, функции $\dot{\mathbf{A}} \in \{C^2(Q)\}^3$, $j \in C^1(Q)$ - решение задачи (3.52), (3.53), (3.55). Умножим обе части равенства (3.52) скалярно на $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\text{div } s; \Omega)$ и проинтегрируем по Ω , применяя тождества (1.6) и учитывая, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left(s \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} : \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} j \operatorname{div} s \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (3.57)$$

При калибровочных соотношениях (2.29) задача (3.52), (3.53), (3.55) сводится к следующей задаче определения $\dot{\mathbf{A}}$: найти такую функцию $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} s; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.55), где $\dot{\mathbf{a}} \in K_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, что при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (3.58)$$

При калибровочных соотношениях (2.30) равенство (3.57) примет вид

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \quad (3.59)$$

В этом случае задача (3.52), (3.53), (3.55) допускает следующую формулировку: найти такую функцию $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} s; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.55), что при всех $\dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство (3.59).

Если функции $\dot{\mathbf{A}} \in \{C^2(Q)\}^3$, $j \in C^1(Q)$ - решение задачи (3.52), (3.54), (3.55), то умножив равенство (3.52) скалярно на произвольную функцию $\dot{\mathbf{v}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и проинтегрировав по Ω , учитывая (1.5) и (3.56), получим равенство

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} j \operatorname{div} s \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} j (s \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) dg.$$

При калибровочных соотношениях (2.31) задача (3.52), (3.54), (3.55) допускает, таким образом, следующую обобщенную формулировку: найти такую функцию $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} s; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.55), где $\dot{\mathbf{a}} \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$, что при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство (3.58).

При калибровочных соотношениях (2.32) задача (3.52), (3.54), (3.55) сводится к следующей задаче определения $\dot{\mathbf{A}}$: найти такую функцию $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega))$, удовлетворяющую начальному условию (3.55), что при всех $\dot{\mathbf{v}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ выполнено равенство (3.59).

Пространства $W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ непрерывно и плотно вложены в $L_s(\Omega)$, поэтому пространство $L_m^*(\Omega)$ можно отождествить с плотными подпространствами в

$W_0^*(\operatorname{div} s; \Omega)$, $W^{0*}(\operatorname{div} s; \Omega)$. Отождествляя далее $L_s(\Omega)$ и $L_s^*(\Omega)$, приходим соответственно к включениям

$$W^0(\operatorname{div} s; \Omega) \subset L_s(\Omega) \equiv L_s^*(\Omega) \subset W^{0*}(\operatorname{div} s; \Omega),$$

$$W_0(\operatorname{div} s; \Omega) \subset L_s(\Omega) \equiv L_s^*(\Omega) \subset W_0^*(\operatorname{div} s; \Omega),$$

при этом скалярное произведение в $L_s(\Omega)$ элементов $\overset{\mathbf{r}}{u} \in L_s(\Omega)$ и $\overset{\mathbf{r}}{v} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ совпадает со значение функционала $\overset{\mathbf{r}}{u}$ на элементе $\overset{\mathbf{r}}{v}$ в смысле двойственности между $W^{0*}(\operatorname{div} s; \Omega)$ и $W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, скалярное произведение в $L_s(\Omega)$ элементов $\overset{\mathbf{r}}{u} \in L_s(\Omega)$ и $\overset{\mathbf{r}}{v} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ совпадает со значение функционала $\overset{\mathbf{r}}{u}$ на элементе $\overset{\mathbf{r}}{v}$ в смысле двойственности между $W_0^*(\operatorname{div} s; \Omega)$ и $W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Пусть $\overset{\mathbf{r}}{w} \in L_2(0, T, W(\operatorname{div} s; \Omega))$. Обозначим через $\overset{\mathbf{r}}{g}_w$ элемент из $\overset{\mathbf{r}}{W} \in L_2(0, T, W^*(\operatorname{div} s; \Omega))$ такой, что для всех $\overset{\mathbf{r}}{v} \in W(\operatorname{div} s; \Omega)$ и при почти всех $t \in (0, T)$

$$\langle \overset{\mathbf{r}}{g}_w(t), \overset{\mathbf{r}}{v} \rangle = \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \overset{\mathbf{r}}{w}(t) \cdot \operatorname{rot} \overset{\mathbf{r}}{v}) d\mathbf{x} + \frac{4p}{c} k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \overset{\mathbf{r}}{w}(t) \operatorname{div} s \overset{\mathbf{r}}{v} d\mathbf{x}.$$

Пусть функция $\overset{\mathbf{r}}{A} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.59), (3.55). Тогда для всех $\overset{\mathbf{r}}{v} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ равенство (3.59) можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \langle \overset{\mathbf{r}}{A}, \overset{\mathbf{r}}{v} \rangle = \left\langle \overset{\mathbf{r}}{E}^{cmp} - \frac{c}{4p} \overset{\mathbf{r}}{g}_A, \overset{\mathbf{r}}{v} \right\rangle. \quad (3.60)$$

Согласно лемме 1.11, $\overset{\mathbf{r}}{A}' \in L_2(0, T, W_0^*(\operatorname{div} s; \Omega))$, $\overset{\mathbf{r}}{A}$ эквивалентна непрерывной функции из $[0, T]$ в $W_0^*(\operatorname{div} s; \Omega)$ и справедливо равенство

$$\frac{1}{c} \overset{\mathbf{r}}{A}' + \frac{c}{4p} \overset{\mathbf{r}}{g}_A = \overset{\mathbf{r}}{E}^{cmp}. \quad (3.61)$$

Если $\overset{\mathbf{r}}{A} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} s; \Omega))$ удовлетворяет тождеству (3.58) при всех $\overset{\mathbf{r}}{v} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, то равенство (3.60) справедливо для $\overset{\mathbf{r}}{v} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и, следовательно, $\overset{\mathbf{r}}{A}' \in L_2(0, T, V_0^*(\operatorname{div} s; \Omega))$, $\overset{\mathbf{r}}{A}$ эквивалентна непрерывной функции из $[0, T]$ в $V_0^*(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Пусть теперь функция $\overset{\mathbf{r}}{A} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ удовлетворяет тождеству (3.59) при всех $\overset{\mathbf{r}}{v} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Тогда (3.60) выполнено в смысле функционалов на $W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и, следовательно, $\overset{\mathbf{r}}{A}' \in L_2(0, T, W^{0*}(\operatorname{div} s; \Omega))$, $\overset{\mathbf{r}}{A}$ эквивалентна непрерывной функции из $[0, T]$ в $W^{0*}(\operatorname{div} s; \Omega)$.

Аналогично, если $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ - решение задачи (3.58), то $\dot{\mathbf{A}}' \in L_2(0, T, V^{0*}(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ и $\dot{\mathbf{A}}$ - непрерывная функция из $[0, T]$ в $V^{0*}(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$.

Теорема 3.9. Пусть $\Omega \subset R^3$ - звездная относительно некоторой точки область. Тогда решения $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ задачи (3.55), (3.58) и $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ задачи (3.55), (3.59) существуют, единственны и эквивалентны непрерывным функциям из $[0, T]$ в $L_s(\Omega)$.

Доказательство. Непрерывность решений следует из леммы 1.10. Как было установлено, $W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$, $V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ - сепарабельные гильбертовы пространства. Определим билинейную форму на $W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ соотношением

$$a(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}) = \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + ck \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{s} \dot{\mathbf{u}} \operatorname{div} \mathbf{s} \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x}, \quad (3.62)$$

$\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$.

Непрерывность и коэрцитивность формы $a(\cdot, \cdot)$ установлена в теореме 2.4. Поскольку $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in L_2(0, T, L_s(\Omega))$, можно применить теорему 1.2, из которой следует существование и единственность решения задачи (3.55), (3.59) в классе $L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$.

Так как сужение формы $a(\cdot, \cdot)$ на $V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ - коэрцитивная форма по теореме 2.3, существует единственное решение $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ задачи (3.55), (3.58).

Теорема 3.10. Пусть область $\Omega \subset R^3$ звездная относительно некоторой точки. Тогда решения $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ задачи (3.55), (3.58) и $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ задачи (3.55), (3.59) существуют, единственны и эквивалентны непрерывным функциям из $[0, T]$ в $L_s(\Omega)$.

Доказательство. Непрерывность решений следует из леммы 1.10. Гильбертовы пространства $W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$, $V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ сепарабельны. Билинейную форму на $W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ определим соотношением (3.62), где $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}} \in W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$.

Непрерывность и коэрцитивность формы $a(\cdot, \cdot)$ установлена в теореме 2.6, а ее сужение на $V^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ - непрерывная коэрцитивная форма по теореме 2.5. Применением теоремы 1.2 завершаем доказательство.

Из леммы 1.10 и теорем 1.3, 1.4 следует далее справедливость следующих утверждений:

Лемма 3.4. Если $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ - решение задачи (3.55), (3.58) или (3.55), (3.59), где $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$, то $\dot{\mathbf{A}}' \in L_2(0, T, L_s(\Omega))$.

Лемма 3.5. Если $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ - решение задачи (3.55), (3.58) или (3.55), (3.59), где $\dot{\mathbf{a}} \in W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$, то $\dot{\mathbf{A}}' \in L_2(0, T, L_s(\Omega))$.

Теорема 3.11. Пусть $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in C^1(0, T, L_s(\Omega))$. Тогда $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ - решение задачи (3.55), (3.58) или (3.55), (3.59) - лежит в классе $C_w^1(d, T, L_s(\Omega)) \cap C(d, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ для любого $d \in (0, T)$. Если при этом $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ и $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{a}} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, то $\dot{\mathbf{A}} \in C_w^1(0, T, L_s(\Omega)) \cap C(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$.

Теорема 3.12. Пусть $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in C^1(0, T, L_s(\Omega))$. Тогда $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ - решение задачи (3.55), (3.58) или (3.55), (3.59) - лежит в классе $C_w^1(d, T, L_s(\Omega)) \cap C(d, T, W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ для любого $d \in (0, T)$. Если при этом $\dot{\mathbf{a}} \in W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ и $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{a}} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, то $\dot{\mathbf{A}} \in C_w^1(0, T, L_s(\Omega)) \cap C(0, T, W^0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$.

Как и для стационарной системы уравнений Максвелла докажем, что задачи (3.55), (3.58) – предельный случай задач (3.55), (3.59).

Теорема 3.13. Пусть $\dot{\mathbf{a}} \in K_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ - решение задачи (3.55), (3.58), $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$ - решение задачи (3.59) с начальным условием

$$\dot{\mathbf{A}}_k(0) = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{a}}_1, \quad \dot{\mathbf{a}}_1 \in K(\operatorname{rot}; \Omega).$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ $\dot{\mathbf{A}}_k$ стремится к $\dot{\mathbf{A}}$ по норме пространства $L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$. Если $\dot{\mathbf{a}}_1 = 0$, то $\dot{\mathbf{A}}_k \rightarrow \dot{\mathbf{A}}$ в $C(0, T, L_s(\Omega))$.

Доказательство. Поскольку, согласно лемме 1.37, каждый элемент $\dot{\mathbf{w}} \in W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ представим в виде $\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega)$ и эти элементы ортогональны в $L_s(\Omega)$, можно записать, что $\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2$, где $\dot{\mathbf{A}}_1 \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega))$, $\dot{\mathbf{A}}_2 \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega))$. При этом $\dot{\mathbf{A}}_1(0) = \dot{\mathbf{a}}_1$, $\dot{\mathbf{A}}_2(0) = 0$ и из равенств (3.58), (3.59) следуют тождества

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1 \operatorname{div} s \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} \quad \text{для всех } \dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega),$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_2 \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \quad \text{для всех } \dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} \mathbf{s}; \Omega).$$

В силу единственности решения задачи (3.58) получаем, что $\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_1 \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} s; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}, \Omega))$.

Так как пространство $K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ плотно в $K(\operatorname{rot}, \Omega)$, применяя лемму 1.10, приходим к равенству

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x}. \quad (3.63)$$

Применим оценку (1.24) к $\dot{\mathbf{A}}_1(t)$, $t \in (0, T)$:

$$\left\{ \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{A}}_1)^2(t) d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \leq \frac{\sqrt{T(\Omega)}}{s_1} \left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2(t) d\mathbf{x} \right\}^{1/2},$$

где $T(\Omega)$ - константа из неравенства Пуанкаре. Тогда

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} + k \frac{s_1}{T(\Omega)} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2t} \int_{\Omega} (s \mathbf{E}^{cmp} \cdot \mathbf{E}^{cmp}) d\mathbf{x} + \frac{t}{2} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x}$$

при произвольном $t > 0$. Положим $t = \frac{2ks_1}{T(\Omega)}$.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} \leq \frac{cT(\Omega)}{2ks_1} \int_{\Omega} (s \mathbf{E}^{cmp} \cdot \mathbf{E}^{cmp}) d\mathbf{x},$$

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1)(t) d\mathbf{x} \leq \frac{cT(\Omega)}{2ks_1} \int_0^t \int_{\Omega} (s \mathbf{E}^{cmp} \cdot \mathbf{E}^{cmp})(x) d\mathbf{x} dx + \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1)(0) d\mathbf{x}.$$

Таким образом, если $\dot{\mathbf{a}}_1 = 0$, то

$$\|\dot{\mathbf{A}}_1\|_{C(0, T, L_s(\Omega))}^2 \leq \frac{cT(\Omega)}{ks_1} \|\mathbf{E}^{cmp}\|_{L_2(0, T, L_s(\Omega))}^2.$$

В общем случае, проинтегрировав равенство (3.63) от 0 до $t \in (0, T)$, получим

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1)(t) d\mathbf{x} + 2ck \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 d\mathbf{x} dt = 2c \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{a}}_1 \cdot \dot{\mathbf{a}}_1) d\mathbf{x}, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} dt &\leq \frac{\sqrt{T(\Omega)}}{s_1} \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp})^2 d\mathbf{x} dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 d\mathbf{x} dt \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{T(\Omega)}}{s_1} \left(\frac{t}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{J}^{cmp})^2 d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2t} \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 d\mathbf{x} dt \right) \end{aligned}$$

при произвольном $t > 0$. Положим $t = \frac{\sqrt{T(\Omega)}}{ks_1}$. Из (3.64) имеем

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1)(t) d\mathbf{x} + ck \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 d\mathbf{x} dt \leq \frac{T(\Omega)}{k} \frac{c}{s_1^2} \int_0^T \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp})^2 d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{a}}_1 \cdot \dot{\mathbf{a}}_1) d\mathbf{x}.$$

Таким образом,

$$\|\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}\|_{L_2(0,T,W)}^2 = \int_0^T \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{A}}_1^2 + (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2) d\mathbf{x} dt \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{T(\Omega)}{s_1^2} \right) \left(\frac{T(\Omega)}{k s_1^2} \|\dot{\mathbf{J}}^{cmp}\|_{2,Q}^2 + \frac{1}{c} \|\dot{\mathbf{a}}_1\|_s^2 \right),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 3.14. Пусть $\dot{\mathbf{a}} \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.55), (3.58), $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.59) с начальным условием

$$\dot{\mathbf{A}}_k(0) = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{a}}_1, \quad \dot{\mathbf{a}}_1 \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega).$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ $\dot{\mathbf{A}}_k$ стремится к $\dot{\mathbf{A}}$ по норме пространства $L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega))$. Если $\dot{\mathbf{a}}_1 = 0$, то $\dot{\mathbf{A}}_k \rightarrow \dot{\mathbf{A}}$ в $C(0, T, L_s(\Omega))$.

Доказательство. Используя лемму 1.36, тождества (3.58), (3.59), получаем, как и в предыдущей теореме, что $\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_1 \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega) \cap K(\operatorname{rot}, \Omega))$, $\dot{\mathbf{A}}_1(0) = \dot{\mathbf{a}}_1$ и

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} \operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1 \operatorname{div} s \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} \quad \text{для всех } \dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} s; \Omega).$$

Так как пространство $K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ плотно в $K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, применяя лемму 1.10, приходим к равенству (3.63), проинтегрировав которое от 0 до $t \in (0, T)$, получим равенство (3.64).

Применим оценку (1.20) к $\dot{\mathbf{A}}_1(t)$:

$$\left\{ \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{A}}_1)^2(t) d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \leq \frac{d(\Omega)}{\sqrt{6} s_1} \left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2(t) d\mathbf{x} \right\}^{1/2},$$

где $d(\Omega)$ - диаметр области Ω . Тогда

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} dt \leq \frac{d(\Omega)}{\sqrt{6} s_1} \left(\frac{t}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp})^2 d\mathbf{x} dt + \frac{1}{2t} \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 d\mathbf{x} dt \right)$$

при произвольном $t > 0$. Положим $t = \frac{d(\Omega)}{\sqrt{6} k s_1}$. Из (3.64) получаем

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1)(t) d\mathbf{x} + ck \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 d\mathbf{x} dt \leq \frac{d^2(\Omega)}{6k} \frac{c}{s_1^2} \int_0^T \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp})^2 d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{a}}_1 \cdot \dot{\mathbf{a}}_1) d\mathbf{x}.$$

Таким образом,

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}} \right\|_{L_2(0,T,W)}^2 = \int_0^T \int_{\Omega} \left(\dot{\mathbf{A}}_1^2 + (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{A}}_1)^2 \right) d\mathbf{x} dt \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{d^2(\Omega)}{6s_1^2} \right) \left(\frac{d^2(\Omega)}{6ks_1^2} \left\| \dot{\mathbf{J}}^{cmp} \right\|_{2,Q}^2 + \frac{1}{c} \left\| \dot{\mathbf{a}}_1 \right\|_s^2 \right).$$

Если $\dot{\mathbf{a}}_1 = 0$, то из (3.63) следует, что

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} + k \frac{6s_1}{d^2(\Omega)} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} \leq \frac{1}{2t} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{cmp}) d\mathbf{x} + \frac{t}{2} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x}$$

при произвольном $t > 0$. Положим $t = \frac{12ks_1}{d^2(\Omega)}$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_1 \cdot \dot{\mathbf{A}}_1) d\mathbf{x} \leq \frac{cd^2(\Omega)}{12ks_1} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{E}}^{cmp}) d\mathbf{x},$$

то есть

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_1 \right\|_{C(0,T,L_s(\Omega))}^2 \leq \frac{cd^2(\Omega)}{12s_1k} \left\| \dot{\mathbf{E}}^{cmp} \right\|_{L_2(0,T,L_s(\Omega))}^2,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Если $\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \in L_{2,loc}(0, \infty, \{L_2(\Omega)\}^3)$, то увеличивая $T > 0$ можем считать, что найденные решения задач (3.58), (3.55) и (3.59), (3.55) определены для всех $t \in (0, \infty)$.

Пусть функция $\dot{\mathbf{J}}^{cmp}$ не зависит от t , то есть $\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} s; \Omega))$, $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} s; \Omega))$ решения задач (3.58), (3.55) и (3.59), (3.55), $\dot{\mathbf{A}}_0 \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и $\dot{\mathbf{A}}_{0k} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решения соответствующих стационарных задач (2.35) и (2.37).

Теорема 3.15 (о стабилизации решения). При $t \rightarrow \infty$ $\dot{\mathbf{A}}(t)$ стремится к $\dot{\mathbf{A}}_0$, $\dot{\mathbf{A}}_k(t)$ стремится к $\dot{\mathbf{A}}_{0k}$ по норме пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$. Справедливы оценки

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \exp\left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega)m_2s_2}t\right) \left\| \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_{2,\Omega}, \quad (3.65)$$

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \exp\left(-c \min\left\{\frac{c}{2pd^2(\Omega)m_2s_2}, \frac{ks_1}{T(\Omega)}\right\}t\right) \left\| \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_{2,\Omega}, \quad (3.66)$$

где $d(\Omega)$ - диаметр области Ω , $T(\Omega)$ - константа из неравенства Пуанкаре.

Если $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{h}} = m^{-1} \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0) \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\mathbf{h} = \operatorname{div} s(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_{0k}) \in H^1(\Omega)$, то $\dot{\mathbf{A}}(t)$, $\dot{\mathbf{A}}_k(t)$ стремятся к $\dot{\mathbf{A}}_0$ и к $\dot{\mathbf{A}}_{0k}$ соответственно в $W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и справедливы оценки

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_V^2 \leq \frac{m_2s_2}{s_1} \left(1 + \frac{d^2(\Omega)s_2}{2s_1} \right) \left\| \operatorname{rot} \dot{\mathbf{h}} \right\|_{2,\Omega} \left\| \dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_{2,\Omega}, \quad (3.67)$$

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_W^2 \leq \left(s_2 \left\| \text{grad } h \right\|_{2,\Omega} \left(\frac{T(\Omega)}{s_1^2} + 1 \right) + m_2 \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \left\| \text{rot } \dot{\mathbf{h}} \right\|_{2,\Omega} \left(\frac{d^2(\Omega)s_2}{2s_1} + 1 \right) \right) \left\| \dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_{2,\Omega}. \quad (3.6)$$

8)

Доказательство. Пусть $\dot{\mathbf{a}} \in K_0(\text{div } s; \Omega)$. Обозначим $\dot{\mathbf{w}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0$. Для любого $T > 0$ $\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } s; \Omega))$, $\dot{\mathbf{w}}(0) = \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0$ и справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}})(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{2} s_2 \int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{w}})^2(t) d\mathbf{x},$$

то есть

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{2pd^2(\Omega)m_2s_2} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} \leq 0$$

и, таким образом,

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} \leq \exp \left(-\frac{c^2}{pd^2(\Omega)m_2s_2} \right) \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}})(0) d\mathbf{x},$$

откуда и следует (3.65).

Если $\dot{\mathbf{a}} \in V_0(\text{div } s; \Omega)$ и $m^{-1} \text{rot}(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0) \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, то выполнены условия теоремы 1.3, из которой следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\mathbf{w}}'(t) \right\|_s &\leq \left\| \dot{\mathbf{w}}'(0) \right\|_s \leq \frac{c^2}{4p\sqrt{s_1}} \left\| \text{rot } m^{-1} \text{rot}(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0) \right\|_{2,\Omega}, \\ \left\| \dot{\mathbf{w}}(t) \right\|_V^2 &\leq \left(1 + \frac{d^2(\Omega)s_2}{2s_1} \right) \left\| \text{rot } \dot{\mathbf{w}} \right\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{4pm_2}{c^2} \left(1 + \frac{d^2(\Omega)s_2}{2s_1} \right) \left\| \dot{\mathbf{w}}'(t) \right\|_s \left\| \dot{\mathbf{w}}(t) \right\|_s. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства получаем тогда (3.67).

Пусть теперь $\dot{\mathbf{a}} \in L_s(\Omega)$, $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_0 + \dot{\mathbf{a}}_1$, где $\dot{\mathbf{a}}_0 \in K_0(\text{div } s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{a}}_1 \in K(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}}_* \in L_2(0, T, V_0(\text{div } s; \Omega))$ - решение задачи (3.58) с начальным условием $\dot{\mathbf{A}}_*(0) = \dot{\mathbf{a}}_0$. По доказанному,

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s \leq \exp \left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega)m_2s_2} t \right) \left\| \dot{\mathbf{a}}_0 - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s.$$

Положим $\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k} + \dot{\mathbf{A}}_0$. Тогда

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_s^2 = \left\| \dot{\mathbf{u}}(t) \right\|_s^2 + \left\| \dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s^2.$$

Согласно теоремам 2.9, 3.13, для любого $T > 0$ $\dot{\mathbf{u}} \in L_2(0, T, W_0(\text{div } s) \cap K(\text{rot}; \Omega))$ и справедливо равенство

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \mathbf{u})^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Применяя оценку (п.14) к $\mathbf{u}(t) \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $s \mathbf{u}(t) \in H_0(\operatorname{div}; \Omega)$, получим

$$\int_{\Omega} (s \mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(t) d\mathbf{x} \leq \frac{T(\Omega)}{s_1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \mathbf{u})^2(t) d\mathbf{x},$$

то есть

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} + \frac{k s_1}{T(\Omega)} \int_{\Omega} (s \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \leq 0$$

и, таким образом,

$$\int_{\Omega} (s \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \leq \exp\left(-\frac{2ck s_1}{T(\Omega)}\right) \int_{\Omega} (s \mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(0) d\mathbf{x}.$$

Окончательно получаем

$$\|\mathbf{A}_k(t) - \mathbf{A}_{0k}\|_s^2 \leq \exp\left(-\frac{c^2}{pd^2(\Omega)m_2 s_2} t\right) \|\mathbf{a}_0 - \mathbf{A}_0\|_s^2 + \exp\left(-\frac{2ck s_1}{T(\Omega)}\right) \|\mathbf{u}(0)\|_s^2.$$

Поскольку $\|\mathbf{a} - \mathbf{A}_{0k}\|_s^2 = \|\mathbf{u}(0)\|_s^2 + \|\mathbf{a}_0 - \mathbf{A}_0\|_s^2$, отсюда следует оценка (3.66).

Если $\mathbf{a} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $m^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{a} - \mathbf{A}_0) \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\operatorname{div} s(\mathbf{a} - \mathbf{A}_{0k}) \in H^1(\Omega)$, то из теоремы

1.3 получаем, что

$$\|\mathbf{u}'(t)\|_s \leq \|\mathbf{u}'(0)\|_s \leq ck \sqrt{s_2} \|\operatorname{grad} \operatorname{div} s(\mathbf{a}_1 - \mathbf{A}_{0k})\|_{2,\Omega},$$

$$\|\mathbf{A}'_*(t)\|_s \leq \|\mathbf{A}'_*(0)\|_s \leq \frac{c^2}{4p \sqrt{s_1}} \|\operatorname{rot} m^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{a} - \mathbf{A}_{0k})\|_{2,\Omega}.$$

Таким образом, так как

$$\frac{c}{4pm_2} \|\operatorname{rot}(\mathbf{A}_*(t) - \mathbf{A}_0)\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{c} \|\mathbf{A}'_*(t)\|_s \|\mathbf{A}_*(t) - \mathbf{A}_0\|_s,$$

$$k \|\operatorname{div} s \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{c} \|\mathbf{u}'(t)\|_s \|\mathbf{u}(t)\|_s,$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_k(t) - \mathbf{A}_{0k}\|_w^2 &\leq \frac{1}{s_1} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_s^2 + \|\mathbf{A}_*(t) - \mathbf{A}_0\|_s^2 \right) + \|\operatorname{rot}(\mathbf{A}_*(t) - \mathbf{A}_0)\|_{2,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} s \mathbf{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{T(\Omega)}{s_1^2} + 1 \right) \sqrt{s_2} \|\operatorname{grad} h\|_{2,\Omega} \|\mathbf{u}(t)\|_s + \left(\frac{d^2(\Omega) s_2}{2s_1} + 1 \right) \frac{m_2}{\sqrt{s_1}} \|\operatorname{rot} \mathbf{h}\|_{2,\Omega} \|\mathbf{A}_* - \mathbf{A}_0\|_s \leq \\ &\leq \left(\sqrt{s_2} \|\operatorname{grad} h\|_{2,\Omega} \left(\frac{T(\Omega)}{s_1^2} + 1 \right) + \frac{m_2}{\sqrt{s_1}} \|\operatorname{rot} \mathbf{h}\|_{2,\Omega} \left(\frac{d^2(\Omega) s_2}{2s_1} + 1 \right) \right) \|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_{0k}\|_s, \end{aligned}$$

откуда и следуют утверждение теоремы и оценка (3.68).

Пусть теперь $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} s; \Omega))$, $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ решения задач (3.58), (3.55) и (3.59), (3.55), $\dot{\mathbf{A}}_0 \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и $\dot{\mathbf{A}}_{0k} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ - решения соответствующих стационарных задач (2.35) и (2.37).

Теорема 3.16. При $t \rightarrow \infty$ $\dot{\mathbf{A}}(t)$ стремится к $\dot{\mathbf{A}}_0$, $\dot{\mathbf{A}}_k(t)$ стремится к $\dot{\mathbf{A}}_{0k}$ по норме пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$. Справедливы оценки

$$\|\dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \exp\left(-\frac{c^2}{2pd^2(\Omega)m_2s_2}t\right) \|\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0\|_{2,\Omega}, \quad (3.69)$$

$$\|\dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k}\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \exp\left(-\frac{c}{d^2(\Omega)} \min\left\{\frac{c}{2pm_2s_2}, 6ks_1\right\}t\right) \|\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_{0k}\|_{2,\Omega}. \quad (3.70)$$

Если $\dot{\mathbf{a}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{h}} = m^{-1} \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0) \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{h}} = \operatorname{div} s (\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_{0k}) \in H_0^1(\Omega)$, то $\dot{\mathbf{A}}(t)$, $\dot{\mathbf{A}}_k(t)$ стремятся к $\dot{\mathbf{A}}_0$ и к $\dot{\mathbf{A}}_{0k}$ соответственно в $W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и справедливы оценки

$$\|\dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0\|_V^2 \leq \frac{m_2s_2}{s_1} \left(1 + \frac{d^2(\Omega)s_2}{2s_1}\right) \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{h}}\|_{2,\Omega} \|\dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0\|_{2,\Omega}, \quad (3.71)$$

$$\|\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}_{0k}\|_W^2 \leq \left(1 + \frac{d^2(\Omega)}{2s_1} \max\left\{\frac{1}{3s_1}, s_2\right\}\right) \left(s_2 \|\operatorname{grad} \dot{\mathbf{h}}\|_{2,\Omega} + m_2 \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{h}}\|_{2,\Omega}\right) \|\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}_{0k}\|_{2,\Omega}. \quad (3.72)$$

Доказательство. Пусть $\dot{\mathbf{a}} \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$. Обозначим $\dot{\mathbf{w}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t) - \dot{\mathbf{A}}_0$. Для любого $T > 0$ $\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} s; \Omega))$, $\dot{\mathbf{w}}(0) = \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0$ и справедливо равенство

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} = 0.$$

Применяя оценку (п.17) к $\dot{\mathbf{w}}(t) \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $s \dot{\mathbf{w}}(t) \in H(\operatorname{div}; \Omega)$, получим

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{w}})(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{2} s_2 \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}})^2(t) d\mathbf{x},$$

то есть справедливо неравенство (3.69).

Если $\dot{\mathbf{a}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и $m^{-1} \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0) \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, то, как при доказательстве теорем 3.5, 3.13 получаем (3.71).

Пусть теперь $\dot{\mathbf{a}} \in L_s(\Omega)$, $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}_0 + \dot{\mathbf{a}}_1$, $\dot{\mathbf{a}}_0 \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{a}}_1 \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}}_* \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.58) с начальным условием $\dot{\mathbf{A}}_*(0) = \dot{\mathbf{a}}_0$. По доказанному,

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s \leq \exp \left(- \frac{c^2}{2pd^2(\Omega)m_2s_2} t \right) \left\| \dot{\mathbf{a}}_0 - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s.$$

Положим $\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k} + \dot{\mathbf{A}}_0$. Тогда

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_s^2 = \left\| \dot{\mathbf{u}}(t) \right\|_s^2 + \left\| \dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s^2.$$

Согласно теоремам 2.10, 3.12, для любого $T > 0$ $\dot{\mathbf{u}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s)) \cap K(\operatorname{rot}; \Omega)$ и справедливо равенство

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} + k \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{u}})^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Применяя оценку (п.17) к $\dot{\mathbf{u}}(t) \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $s \dot{\mathbf{u}}(t) \in H(\operatorname{div}; \Omega)$, получим

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(t) d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{6s_1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x},$$

то есть

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} + \frac{6ks_1}{d^2(\Omega)} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} \leq 0$$

и, таким образом,

$$\int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) d\mathbf{x} \leq \exp \left(- \frac{12cks_1}{d^2(\Omega)} \right) \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}})(0) d\mathbf{x}.$$

Окончательно получаем

$$\left\| \dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_s^2 \leq \exp \left(- \frac{c^2}{pd^2(\Omega)m_2s_2} t \right) \left\| \dot{\mathbf{a}}_0 - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s^2 + \exp \left(- \frac{12cks_1}{d^2(\Omega)} \right) \left\| \dot{\mathbf{u}}(0) \right\|_s^2.$$

Поскольку $\left\| \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_{0k} \right\|_s^2 = \left\| \dot{\mathbf{u}}(0) \right\|_s^2 + \left\| \dot{\mathbf{a}}_0 - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s^2$, отсюда следует оценка (3.70).

Если $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $m^{-1} \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_0) \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\operatorname{div} s (\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{A}}_{0k}) \in H^1(\Omega)$, то из теоремы

1.3 получаем, что

$$\left\| \dot{\mathbf{u}}'(t) \right\|_s \leq \left\| \dot{\mathbf{u}}'(0) \right\|_s \leq \frac{ck}{\sqrt{s_1}} \left\| \operatorname{grad} \operatorname{div} s (\dot{\mathbf{a}}_1 - \dot{\mathbf{A}}_{0k}) \right\|_{2, \Omega}.$$

Таким образом, так как

$$\left\| \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_0) \right\|_{2, \Omega}^2 \leq \frac{4pm_2}{c^2} \left\| \dot{\mathbf{A}}'_*(t) \right\|_s \left\| \dot{\mathbf{A}}_*(t) - \dot{\mathbf{A}}_0 \right\|_s,$$

$$\left\| \operatorname{div} s \dot{\mathbf{u}} \right\|_{2, \Omega}^2 \leq \frac{1}{ck} \left\| \dot{\mathbf{u}}'(t) \right\|_s \left\| \dot{\mathbf{u}}(t) \right\|_s,$$

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{A}}_k(t) - \dot{\mathbf{A}}_{0k}\|_W^2 &\leq \left(\frac{d^2(\Omega)}{6s_1^2} + 1 \right) \int_{\Omega} (\operatorname{div} s \dot{\mathbf{u}})^2(t) d\mathbf{x} + \left(\frac{d^2(\Omega)s_2}{2s_1} + 1 \right) \int_{\Omega} (\operatorname{rot}(\dot{\mathbf{A}}_* - \dot{\mathbf{A}}_0))^2 d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \left(\sqrt{s_2} \|\operatorname{grad} h\|_{2,\Omega} \left(\frac{d^2(\Omega)}{6s_1^2} + 1 \right) + \frac{m_2}{\sqrt{s_1}} \|\operatorname{rot} \dot{\mathbf{h}}\|_{2,\Omega} \left(\frac{d^2(\Omega)s_2}{2s_1} + 1 \right) \right) \|\dot{\mathbf{A}}_k - \dot{\mathbf{A}}_{0k}\|_s \end{aligned}$$

откуда и следует (3.72).

Докажем эквивалентность задач в терминах векторного магнитного потенциала соответствующим задачам в терминах напряженности магнитного поля.

Теорема 3.17. Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.7), (3.12), $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.58), (3.55) или (5.59), (3.55), причем $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{h}}$. Тогда $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{H}}$.

Доказательство. Пусть $\dot{\mathbf{A}} \in K_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.58), (3.55). Если $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{h}}$, то $\dot{\mathbf{A}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$ и согласно лемме 3.4, $\dot{\mathbf{A}}' \in L_2(0, T, L_s(\Omega))$.

Ввиду леммы 1.39, $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} = \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2$, где $\dot{\mathbf{E}}_1 \in L_2(0, T, K_0(\operatorname{div} s, \Omega))$, $\dot{\mathbf{E}}_2 \in L_2(0, T, K(\operatorname{rot}, \Omega))$. Обозначим $\dot{\mathbf{J}}_1 = s \dot{\mathbf{E}}_1$.

Для всех $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{E}}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{H^1(\Omega)\}^3$. Тогда по лемме 1.39 $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in K_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$, а поскольку $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Из (3.58) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

то есть

$$\operatorname{rot} m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \frac{4p}{c} \dot{\mathbf{J}}_1 - \frac{4p}{c^2} s \dot{\mathbf{A}}' \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3),$$

$$\int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\operatorname{rot} m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} \text{ для всех } \dot{\mathbf{y}} \in \{H^1(\Omega)\}^3.$$

По теореме 1.9, $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{A} \in L_2(0, T, H_0(\operatorname{rot}; \Omega))$. Положим $\dot{H}_* = m^{-1} \operatorname{rot} \dot{A}$. Так как при почти всех $t \in [0, T]$ $\operatorname{div} m \dot{H}_*(t) = 0$, $\dot{H}_* \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} m; \Omega))$.

Покажем, что $\dot{H}_*$ - решение задачи (3.7), (3.12). Пусть $\dot{v} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$.

Ввиду леммы 1.25,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{H}_* \cdot \dot{v}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{A} \cdot \dot{v}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\dot{A} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{A} \cdot s^{-1} \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x}.$$

Так как $s^{-1} \operatorname{rot} \dot{v} \in K_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, по лемме 1.41 найдется последовательность $\{\dot{w}_n\} \in V_0(\operatorname{div} s; \Omega)$, сходящаяся к $s^{-1} \operatorname{rot} \dot{v}$ в $L_s(\Omega)$ и, соответственно, в $L_2(0, T, L_s(\Omega))$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{A} \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x} &= c \int_{\Omega} (\dot{J}^{cmp} \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x} - \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{A} \cdot \operatorname{rot} \dot{w}_n) d\mathbf{x} = \\ &= c \int_{\Omega} (\dot{J}^{cmp} \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x} - \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (\dot{H}_* \cdot \operatorname{rot} \dot{w}_n) d\mathbf{x} = c \int_{\Omega} (\dot{J}^{cmp} \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x} - \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{H}_* \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Умножим (3.73) на функцию $y \in C(0, T)$ такую, что $y(T) = 0$, и проинтегрируем по частям:

$$-\int_0^T y' \int_{\Omega} (s \dot{A} \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x} dt + \frac{c^2}{4p} \int_0^T y \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{H}_* \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x} dt = c \int_0^T y \int_{\Omega} (\dot{J}^{cmp} \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x} dt + y(0) \int_{\Omega} (s \dot{A} \cdot \dot{w}_n) d\mathbf{x}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} -\int_0^T y' \int_{\Omega} (\dot{A} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} dt + \frac{c^2}{4p} \int_0^T y \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H}_* \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} dt = \\ = c \int_0^T y \int_{\Omega} (\dot{E}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} dt + y(0) \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{A} \cdot \dot{v}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $\dot{v} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$ смысле скалярных распределений на $(0, T)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{H}_* \cdot \dot{v}) d\mathbf{x} + \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{H}_* \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{E}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{v}) d\mathbf{x}$$

и, следовательно, для всех y указанного вида $y(0) \int_{\Omega} (m \dot{H}_*(0) \cdot \dot{v}) d\mathbf{x} = y(0) \int_{\Omega} (m \dot{h} \cdot \dot{v}) d\mathbf{x}$, то есть

$$\dot{H}_*(0) = \dot{h} \text{ и } \dot{H}_* = \dot{H} \text{ - решение задачи (3.7), (3.12).}$$

Если $\dot{A}_k$ - решение задачи (3.59), (3.55) то по теореме 3.14 $\operatorname{rot} \dot{A}_k = \operatorname{rot} \dot{A} = m \dot{H}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.18. Пусть $\dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} m; \Omega))$ - решение задачи (3.7), (3.12), $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.58), (3.55) или (3.59), (3.55), причем $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{h}}$. Тогда $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{H}}$.

Доказательство. Пусть $\dot{\mathbf{a}} \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.58), (3.55). Если $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{h}}$, то $\dot{\mathbf{a}} \in V(\operatorname{div} s; \Omega)$ и согласно лемме 3.5, $\dot{\mathbf{A}}' \in L_2(0, T, L_s(\Omega))$.

Ввиду леммы 1.38, $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} = \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{E}}_2$, где $\dot{\mathbf{E}}_1 \in L_2(0, T, K(\operatorname{div} s; \Omega))$, $\dot{\mathbf{E}}_2 \in L_2(0, T, K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega))$. Обозначим $\dot{\mathbf{J}}_1 = s \dot{\mathbf{E}}_1$.

Для всех $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$

$$\int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{E}}_2 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{D(\Omega)\}^3$. Тогда по лемме 1.38 $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, а поскольку $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Из (3.58) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

то есть

$$\operatorname{rot} m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \frac{4p}{c} \dot{\mathbf{J}}_1 - \frac{4p}{c^2} s \dot{\mathbf{A}}' \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3),$$

$\dot{\mathbf{H}}_* = m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, H(\operatorname{rot}; \Omega))$. Так как $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, V^0(\operatorname{div} s; \Omega))$, для всех $\mathbf{y} \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{y}) d\mathbf{x} = 0,$$

следовательно, по теореме 1.9, $\dot{\mathbf{H}}_* \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} m; \Omega))$.

Покажем, что $\dot{\mathbf{H}}_*$ - решение задачи (3.7), (3.12). Пусть $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Ввиду леммы 1.22,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_* \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}.$$

Так как $s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} \in K(\operatorname{div} s; \Omega)$, по лемме 1.40 найдется последовательность $\{\dot{\mathbf{w}}_n\} \in V^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, сходящаяся к $s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}$ в $L_s(\Omega)$ и, соответственно, в $L_2(0, T, L_s(\Omega))$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} &= c \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} - \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} = \\ &= c \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} - \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{H}}_* \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} = c \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} - \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_* \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Умножим (3.74) на функцию $y \in C(0, T)$ такую, что $y(T) = 0$, и проинтегрируем по частям:

$$-\int_0^T y' \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} dt + \frac{c^2}{4p} \int_0^T y \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_* \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} dt = c \int_0^T y \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x} dt + y(0) \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_n) d\mathbf{x}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} -\int_0^T y' \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} dt + \frac{c^2}{4p} \int_0^T y \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_* \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} dt &= \\ = c \int_0^T y \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} dt + y(0) \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$ в смысле скалярных распределений на $(0, T)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_* \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c^2}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_* \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}$$

и, следовательно, для всех y указанного вида $y(0) \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}}_*(0) \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = y(0) \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{h}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x}$, то есть

$\dot{\mathbf{H}}_*(0) = \dot{\mathbf{h}}$ и $\dot{\mathbf{H}}_* = \dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.7), (3.12).

Если $\dot{\mathbf{A}}_k$ - решение задачи (3.59), (3.55) то по теореме 3.14 $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_k = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = m \dot{\mathbf{H}}$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.6. Пусть $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W_0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.58), (3.55) или (3.59), (3.55), где $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\operatorname{div} s; \Omega)$. Тогда найдется такая функция $j \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$, что $\dot{\mathbf{A}}, j$ - решение задачи (3.52), (3.53), (3.55).

Доказательство. Согласно теореме 3.15, $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, H_0(\operatorname{rot}; \Omega))$, причем $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.12) с начальным условием $\dot{\mathbf{H}}(0) = m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{a}}$.

Определим функцию $\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ соотношением

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}' + \frac{c}{4p} s^{-1} \operatorname{rot} m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{E}}^{cmp}. \quad (3.75)$$

Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{\mathbf{D}(\Omega)\}^3$. Согласно лемме 1.38, $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in K(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$. Так как $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}$, $\dot{\mathbf{v}} \in V^0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Ввиду (3.12),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{w}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, K(\operatorname{rot}; \Omega))$ и, следовательно, по лемме 1.26, найдется функция $j \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$ такая, что $\dot{\mathbf{w}} = -\operatorname{grad} j$. По построению, справедливо равенство (3.52), то есть $\dot{\mathbf{A}}, j$ - решение задачи (3.52), (3.53), (3.55).

Лемма 3.7. Пусть $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{a}} \in W^0(\operatorname{div} s; \Omega)$, $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{a}} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}} \in L_2(0, T, W^0(\operatorname{div} s; \Omega))$ - решение задачи (3.58), (3.55) или (3.59), (3.55). Тогда найдется такая функция $j \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$, что $\dot{\mathbf{A}}, j$ - решение задачи (3.52), (3.54), (3.55).

Доказательство. Согласно теореме 3.16, $m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\operatorname{div} m; \Omega))$, причем $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.12) с начальным условием $\dot{\mathbf{H}}(0) = m^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{a}}$.

Определим функцию $\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ соотношением (3.75). Из доказательства теоремы 3.2 следует, что

$$\dot{\mathbf{w}} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}' = \frac{c}{4p} s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in L_2(0, T, H_0(\operatorname{rot}; \Omega)).$$

Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{\mathbf{D}(\Omega)\}^3$. Согласно лемме 1.39, $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in K_0(\operatorname{div} m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$. Так как $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}$, $\dot{\mathbf{v}} \in V_0(\operatorname{div} m; \Omega)$. Ввиду (3.12),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{w}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{A}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (m \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (s^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \cdot \operatorname{rot} \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, K(\text{rot}; \Omega))$ и, следовательно, по лемме 1.26, найдется функция $j \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$ такая, что $\dot{\mathbf{w}} = -\text{grad } j$. Условия (3.54) справедливы по доказанному, равенство (3.52) - по построению, то есть $\dot{\mathbf{A}}$, j - решение задачи (3.52), (3.54), (3.55).

Лемма 3.8. Пусть $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\text{div } s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W_0(\text{div } s; \Omega))$ - решение задачи (3.59), (3.55), функция $\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ определена соотношением (3.75), где $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_k$. Положим

$$j_k = -k \text{div } s \dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, L_2(\Omega)). \quad (3.76)$$

Тогда $j_k \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$, при этом $\text{grad } j_k = -\dot{\mathbf{w}}$.

Доказательство. Из теоремы 3.15 следует, что $m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, H_0(\text{rot}; \Omega))$, причем $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.12) с начальным условием $\dot{\mathbf{H}}(0) = m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{a}}$.

Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{D(\Omega)\}^3$. Согласно лемме 1.39, $s^{-1}\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in K_0(\text{div } s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\text{rot}; \Omega)$. Так как $s\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{y}} - s\dot{\mathbf{v}}$, $\dot{\mathbf{g}} \in W_0(\text{div } s; \Omega)$. Из тождества (3.59) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{w}} \cdot s\dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s\dot{\mathbf{A}}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} = \\ &= -k \int_{\Omega} \text{div } s \dot{\mathbf{A}}_k \text{div } s \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} j_k \text{div } s \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} j_k \text{div } \dot{\mathbf{y}} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Пусть $h \in D(\Omega)$. Возьмем в качестве $\dot{\mathbf{y}}$ функции $h \dot{\mathbf{e}}_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $\int_{\Omega} w_k h d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} j_k \partial_k h d\mathbf{x}$, то есть $\partial_k j_k = w_k$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.9. Пусть $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\text{div } s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W_0(\text{div } s; \Omega))$ - решение задачи (3.59), (3.55), функции $\dot{\mathbf{w}} \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$, $j_k \in L_2(0, T, L_2(\Omega))$ определены соотношениями (3.75), где $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_k$, и (3.76) соответственно. Тогда $j_k \in L_2(0, T, H^1(\Omega))$, при этом $\text{grad } j_k = -\dot{\mathbf{w}}$.

Доказательство. Из теоремы 3.16 следует, что $m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{H}} \in L_2(0, T, V_0(\text{div } m; \Omega))$, причем $\dot{\mathbf{H}}$ - решение задачи (3.12) с начальным условием $\dot{\mathbf{H}}(0) = m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{a}}$.

Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{D(\Omega)\}^3$. Согласно лемме 1.38, $s^{-1}\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{g}}$, где $\dot{\mathbf{v}} \in K(\text{div } s; \Omega)$, $\dot{\mathbf{g}} \in K(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega)$. Так как $s\dot{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{y}} - s\dot{\mathbf{v}}$, $\dot{\mathbf{g}} \in W^0(\text{div } s; \Omega)$. Из тождества (3.59) получаем

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\dot{\mathbf{w}} \cdot \dot{\mathbf{y}}) d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{w}} \cdot s \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (s \dot{\mathbf{A}}_k \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} + \frac{c}{4p} \int_{\Omega} (\text{rot } \dot{\mathbf{H}} \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{J}}^{cmp} \cdot \dot{\mathbf{g}}) d\mathbf{x} = \\ &= -k \int_{\Omega} \text{div } s \dot{\mathbf{A}}_k \text{ div } s \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} j_k \text{ div } s \dot{\mathbf{g}} d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} j_k \text{ div } \dot{\mathbf{y}} d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Пусть $h \in D(\Omega)$. Возьмем в качестве $\dot{\mathbf{y}}$ функции $h \dot{\mathbf{e}}_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $\int_{\Omega} w_k h d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} j_k \partial_k h d\mathbf{x}$, то есть $\partial_k j_k = w_k$, что и требовалось доказать.

Объединяя утверждения теорем 3.15, 3.16 и лемм 3.6 - 3.9 получаем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3.19. Пусть $\dot{\mathbf{h}} \in K(\text{div } m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{a}} \in W_0(\text{div } s; \Omega)$, причем $m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{h}}$, $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W_0(\text{div } s; \Omega))$ - решение задачи (3.59), (3.55), функция j_k определена соотношением (3.76). Тогда функции $\dot{\mathbf{H}} = m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_k$, $\dot{\mathbf{B}} = \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_k$, $\dot{\mathbf{J}} = \frac{c}{4p} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}$, $\dot{\mathbf{E}} = -\text{grad } j_k - \dot{\mathbf{A}}'_k$, $\dot{\mathbf{D}} = e \dot{\mathbf{E}}$ и r , определенная соотношением (3.8) - решение задачи (3.1)-(3.5), (2.5), (2.6), (3.7)

Если $\dot{\mathbf{E}}^{cmp} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{h}} \in K_0(\text{div } m; \Omega)$, $\dot{\mathbf{a}} \in W^0(\text{div } s; \Omega)$ и $m^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{h}}$, $\dot{\mathbf{A}}_k \in L_2(0, T, W^0(\text{div } s; \Omega))$ - решение задачи (3.59), (3.55), то определенные выше функции $\dot{\mathbf{H}}, \dot{\mathbf{B}}, \dot{\mathbf{J}}, \dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{D}}, r$ - решение задачи (3.1)-(3.4), (2.5), (2.6), (3.6), (3.7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены краевые и начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла в стационарном и квазистационарном магнитном приближении.

Приводятся различные обобщенные постановки краевых и начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла, коэффициенты μ , ε , σ которой - самосопряженные, положительно определенные линейные операторы, действующие в $\{L_2(\Omega)\}^3$. В том числе, сформулированы такие задачи определения $\dot{\vec{H}}$, что условие соленоидальности вектора $m\dot{\vec{H}}$ является свойством решения в стационарном случае и экспоненциально устойчиво в квазистационарном.

Предложены калибровочные соотношения, позволяющие сформулировать в виде интегральных тождеств задачи определения векторного магнитного потенциала.

Доказана однозначная разрешимость поставленных задач. Изучена связь между задачами в терминах векторного потенциала при различных калибровочных соотношениях. Установлена эквивалентность задач в терминах векторного магнитного потенциала соответствующим постановками в терминах напряженности магнитного поля.

Рассмотрены задачи для стационарной системы уравнений Максвелла в области, содержащей непроводящие включения. Метод слабой проводимости, заключающийся в замене непроводящих включений слабопроводящими, применен к задачам с различными краевыми условиями.

Доказана асимптотическая устойчивость решений стационарных задач. Получены оценки скорости стабилизации решений.

Приложение содержит вывод оценок скалярных произведений векторных полей через нормы их ротора и дивергенции в L_p -пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики / В.И. Агошков - М: ИВМ РАН, 2003.
2. Александров А.П., Дмитриев В.И. О задаче Коши для уравнений Максвелла в анизотропной проводящей среде/ А.П. Александров, В.И. Дмитриев// Вычислительные методы и программирование. - М.: Изд. МГУ, 1975. Вып. 24., С. 23-37.
3. Алексеев Г.В. Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости / Г.В. Алексеев// Сибирский математический журнал, 2004. - Т. 45, №2. - С. 243-263.
4. Алексеев Г.В. О разрешимости однородной начально-краевой задачи для уравнений магнитной гидродинамики идеальной жидкости/ Г.В. Алексеев// Динамика сплошных сред, 1982. Т. 57.-С. 3-20.
5. Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла / Л.А. Алексеева // ЖВМ и МФ, 2002. Т. 42. - №1. - С. 76-88.
6. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Метод обобщенных функций при решении стационарных краевых задач для уравнений Максвелла/ Л.А. Алексеева, С.С. Саутбеков // ЖВМ и МФ, 2000. Т. 40, №4.-С. 611-622.
7. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Фундаментальные решения уравнений Максвелла/ Л.А. Алексеева, С.С. Саутбеков// Дифференциальные уравнения, 1999. Т.35. №1., С.125-127.
8. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей/ С.Н. Антонцев, А.В. Кажихов, В.Н. Монаков - Новосибирск: Наука, 1983.
9. Бахвалов Н.С., Кобельков Г.М., Чижонков Е.В. Эффективные методы решения уравнений Навье – Стокса/ Н.С. Бахвалов, Г.М. Кобельков, Е.В. Чижонков// Численное моделирование в аэрогидродинамике. - М.: Наука, 1976. С. 37-45.
10. Березовский А.А., Плотницкий Т.А. О разрешимости нелинейных краевых задач электродинамики проводящих сред / А.А. Березовский, Т.А. Плотницкий// Краевые задачи электродинамики проводящих сред/ Под ред. Ю.А. Митропольского. - Киев: Изд. ИМ АН УССР, 1976. - С. 139-148.
11. Бирман М.Ш. Три задачи теории сплошных сред в многогранниках / М.Ш. Бирман // Записки научных семинаров ПОМИ. Т.200. Вып. 24. - С. 27-37.

12. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. L_2 -теория оператора Максвелла в произвольных областях/ М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк// Успехи математических наук, 1987. Т. 42, № 6. - С. 61-76.
13. Бирман М.Ш. Об операторе Максвелла в областях с ребрами/ М.Ш. Бирман // Записки научных семинаров ЛОМИ, 1985. Т. 147, вып.17.- С. 3-9.
14. Бирман М.Ш. Оператор Максвелла для резонатора с входящими ребрами/ М.Ш. Бирман // Вестник ЛГУ. Сер.1, 1986. №3.-С.3-8.
15. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Оператор Максвелла в областях с негладкой границей/ М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк// Сибирский математический журнал, 1987. Т.27, №1. - С.23-76.
16. Боговский М.Е. Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad / М.Е. Боговский// Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1980. - С. 5-40.
17. Быховский Э.Б. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально-проводящей границы / Э.Б. Быховский // Вестник ЛГУ, 1957. № 13. - С. 50-66.
18. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа/ Э.Б. Быховский, Н.В. Смирнов //Труды МИАН СССР, 1960. Т.59. - С. 5-36.
19. Вейль Г. Метод ортогональной проекции в теории потенциала/ Г. Вейль // Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984.
20. Вишик М.И. Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений/ М.И. Вишик// Математический сборник, 1949. Т. 25 (67). - С. 189-234.
21. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров - М.: Наука, 1976.
22. Ворович И.И., Юдович В.И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости / И.И. Ворович, В.И. Юдович// Математический сборник, 1961. Т.53. - С. 393-428.
23. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения/ Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас - М.: Мир, 1978.
24. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах/ М.П. Галанин, Ю.П. Попов - М.: Наука, Физматлит, 1995.

25. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, Н. Трудингер - М.: Наука, 1989.
26. Гудович И.С., Крейн С.Г., Куликов И.М. Краевые задачи для уравнений Максвелла/ И.С. Гудович, С.Г. Крейн, И.М. Куликов // Доклады АН СССР, 1972. Т. 207, №2. - С. 321-324.
27. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики/ Н.М. Гюнтер - М.: Гостехиздат, 1953.
28. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения/ Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли - М.: Мир, 1968.
29. Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия/ Ж. Де Рам - М: Издательство иностранной литературы, 1956.
30. Дезин А.А., Зеленьяк Т.И., Масленникова В.Н. О некоторых математических задачах в гидродинамике / А.А. Дезин, Т.И. Зеленьяк, В.Н. Масленникова// Дифференциальные уравнения с частными производными. - Новосибирск: Наука, 1980. - С. 21-31.
31. Демирчян К.С., Чечурин В.Л. Машинные расчеты электромагнитных полей/ К.С. Демирчян, В.Л. Чечурин - М.: Высшая школа, 1986.
32. Дубинский Ю.А. Об одном ортогональном разложении L_p в и его приложении к задаче Стокса/ Ю.А. Дубинский// Доклады РАН, 2000. Т.374, № 1. - С. 13-16.
33. Дубинский Ю.А. Об одном ортогональном разложении Соболевских пространств и краевой задаче типа задачи Стокса/ Ю.А. Дубинский// Доклады РАН, 2000. Т.373, № 6. - С. 727-730.
34. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике/ Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс - М.: Наука, 1980.
35. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике/ О. Зенкевич - М.: Мир, 1975.
36. Ильин В.П. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных методов/ В.П. Ильин// Труды МИ АН СССР, 53,1959. С. 64-127.
37. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики/ В.П. Ильин - М.: Наука, 1985.
38. Иосида К. Функциональный анализ/ К. Иосида - М., Мир, 1967.
39. Калинин А.В. Некоторые оценки теории векторных полей/ А.В. Калинин// Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление - 1997. Т. 20, №1. С. 32-38.

40. Калинин А.В., Калинкина А.А. Некоторые оценки векторных полей и их применение в электромагнитной теории/ Нижегород. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского / А.В. Калинин, А.А. Калинкина - Н. Новгород, 2002. - 29 с. - Деп. в ВИНТИ № 8-В 2002.
41. Калинин А.В., Калинкина А.А. L_p -оценки векторных полей/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина // Известия вузов. Математика.-2004. № 3. - С. 26-35.
42. Калинин А.В., Калинкина А.А. Вариационные формулировки стационарных задач электродинамики в терминах векторного магнитного потенциала/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина // Современные методы в теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-ХІІІ» - Воронеж: ВГУ, 2002. - С. 68-69.
43. Калинин А.В., Калинкина А.А. Калибровочные соотношения и вариационные формулировки стационарных задач электродинамики в терминах векторного магнитного потенциала/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина// VII Нижегородская сессия молодых ученых: Тезисы докладов. - Н. Новгород: Изд. Гладкова О. В., 2002. С. 45-46.
44. Калинин А.В., Калинкина А.А. Оценки векторных полей и стационарная система уравнений Максвелла/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина// Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление, 2002. Вып. 1 (25). С. 95-107.
45. Калинин А.В., Калинкина А.А. Квазистационарные задачи электродинамики// Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 18/ Казанское математическое общество. Лобачевские чтения - 2002/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина// Материалы международной молодежной научной школы-конференции. - Казань: Издательство Казанского математического общества, 2002. С. 40-41.
46. Калинин А.В., Калинкина А.А. Вариационные формулировки квазистационарных задач электродинамики/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина// Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. Воронеж: ВГУ, 2003. - С. 114-115.
47. Калинин А.В., Калинкина А.А. Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина// Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 26. - С. 21-38.
48. Калинин А.В., Калинкина А.А. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина// Современные методы качественной

- теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения-XIV» -Воронеж: ВГУ, 2003. - С. 61-62.
49. Калинин А.В., Калинкина А.А. Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения/ А.В. Калинин, А.А. Калинкина// VIII Нижегородская сессия молодых ученых: Тезисы докладов. - Н. Новгород: Изд. Гладкова О. В., 2003. С. 28-29.
50. Калинин А.В., Морозов С.Ф. Стационарные задачи для системы уравнений Максвелла в неоднородных средах/ А.В. Калинин, С.Ф. Морозов// Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление, 1997. - С. 24-31.
51. Калинин А.В., Морозов С.Ф. Стационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабо проводящими включениями/ А.В. Калинин, С.Ф. Морозов// Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление, 1999. № 1 (20). -С. 48-62.
52. Калинин А.В., Морозов С.Ф. Система уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении/ А.В. Калинин, С.Ф. Морозов// Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление, 2001. № 1 (23). - С. 97-106.
53. Калинкина А.А. Некоторые оценки векторных полей электромагнитной теории/ А.А. Калинкина// Современные исследования в математике и механике: Труды 23 Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ, Москва, 9-14 апреля 2001г. Вып. 2. М.: Изд-во ЦПИ ММФ МГУ, 2001. С. 135-138.
54. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов - М., Наука, 1984.
55. Капитонов Б.В. Оценки при $t \rightarrow \infty$ решений краевых задач для одной системы уравнений газовой динамики/ Б.В. Капитонов// Динамика сплошной среды, Новосибирск, 1976. Вып. 27.- С. 45-51.
56. Киселев А.А., Ладыженская О.А. О существовании и единственности решения для нестационарной задачи вязкой несжимаемой жидкости/ А.А. Киселев, О.А. Ладыженская // Известия АН СССР, сер. математическая, 1951. Т. 21, № 5. С. 655-680.
57. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем/ Г.В. Кисунько - Л.: Изд-во ВКАС, 1949.
58. Кобельков Г.М. О численных методах решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление/ Г.М. Кобельков// Вычислительные процессы и системы. - М.: Наука, 1991. Вып. 8. С. 204-236.

59. Кобельков Г.М. Симметричные аппроксимации уравнений Навье-Стокса/ Г.М. Кобельков// Математический сборник, 2002. Т. 193, № 7. - С. 87-108.
60. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления/ Н.Е. Кочин - М.: Изд-во АН СССР, 1951.
61. Кошелев А.И. Об ограниченности в L_p производных от решений эллиптических дифференциальных уравнений/ А.И. Кошелев// Математический сборник, 1956. Т. 38 (80). - С. 339-372.
62. Крейн С.Г. О функциональных свойствах операторов векторного анализа и гидродинамики/ С.Г. Крейн// Доклады АН СССР, 1953. Т. 93. № 6. - С. 969-972.
63. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах / С.Г. Крейн - М.: Наука, 1967.
64. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика/ А.Г. Куликовский, Г.А.Любимов - М.: Физматгиз, 1962.
65. Кулон Ж.-Л., Сабоннадьер Ж.-К. САПР в электротехнике/ Ж.-Л. Кулон, Ж.-К. Сабоннадьер - М.: Мир, 1988.
66. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. / Р. Курант, Д. Гильберт - Л.: Гостехиздат, 1961.
67. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей/ П.А. Курбатов, С.А. Аринчин - М.: Энергоатомиздат, 1984.
68. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики/ О.А. Ладыженская - М.: Наука, 1973.
69. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости/ О.А. Ладыженская - М.: Физматгиз, 1961.
70. Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений различных типов/ О.А. Ладыженская// Доклады АН СССР, 1955. Т. 102, №2. С. 207-210; Математический сборник, 1956. Т. 39 (81), № 4. - С. 491-552.
71. Ладыженская О.А. Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье-Стокса при наличии осевой симметрии/ О.А. Ладыженская // Записки научного семинара ЛОМИ, 1968. Вып.7. - С. 155-177.
72. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения/ О.А. Ладыженская - М.: Гостехиздат, 1953.
73. Ладыженская О.А. О решении общей задачи дифракции/ О.А. Ладыженская // Доклады АН СССР, 1954. Т.96, № 3. - С. 427-429.

74. Ладыженская О.А. Решение «в целом» краевой задачи для уравнений Навье - Стокса в случае двух пространственных переменных/ О.А. Ладыженская // Доклады АН СССР, 1958. Т. 123, № 3. С. 427-429.
75. Ладыженская О.А., Солонников В.А. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости/ О.А. Ладыженская, В.А. Солонников// Труды МИАН СССР, 1960. Т.59. С. 115-173.
76. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса./ О.А. Ладыженская, В.А. Солонников// Записки научного семинара ЛОМИ, 1976. Т.59, вып.9. С. 81-116.
77. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа/ О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева - М.: Наука, 1963.
78. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа/ О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева - М.: Наука, 1964.
79. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред/ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц - М.: Наука, 1982.
80. Латова А.Ю, Чудинович И.Ю. Граничные уравнения в задачах нестационарной дифракции электромагнитных волн/ А.Ю. Латова, И.Ю. Чудинович // Дифференциальные уравнения, 1997. Т. 33, № 9. -С. 1191-1198.
81. Лебедев А.Д., Урюков Б.Д. Импульсные ускорители плазмы высокого давления/ А.Д. Лебедев, Б.Д. Урюков - Новосибирск: Изд. ИТФ СО АН СССР, 1990.
82. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач/ Ж.-Л. Лионс - М.: Мир, 1972.
83. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес - М.: Мир, 1971.
84. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева/ В.Г. Мазья -Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
85. Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров И.А. О роли лоренцевой калибровки в уравнениях электродинамики/ А.М. Макаров, Л.А. Лунева, И.А. Макаров// Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки, 2002. №1. С. 118-123.
86. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы/ Г.И. Марчук, В.И. Агошков - М.: Наука, 1981.

87. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей/ В.Н. Масленникова, М.Е. Боговский // Сибирский математический журнал, 1983. Т. 24, №5. С. 159-171.
88. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Аппроксимация соленоидальных и потенциальных векторных полей в пространствах Соболева и задачи математической физики/ В.Н. Масленникова, М.Е. Боговский// Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. - С. 129-137.
89. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. О плотности финитных соленоидальных векторных полей/ В.Н. Масленникова, М.Е. Боговский// Сибирский математический журнал, 1978. Т.19, № 5. - С. 1092-1108.
90. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Пространства Соболева соленоидальных векторных полей/ В.Н. Масленникова, М.Е. Боговский// Сибирский математический журнал, 1981. Т.22, № 3. - С. 91-118.
91. Масленникова В.Н., Тимошин М.А. Обобщенные решения с первыми производными из L_p в задаче обтекания для системы Стокса/ В.Н. Масленникова, М.А. Тимошин// Сибирский математический журнал, 1994. Т. 35, №1.- С. 135-162.
92. Матюкевич С.И. О нестационарной системе Максвелла в клине/ С.И. Матюкевич// Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1, 2000. Вып. 1. - С. 35-43.
93. Матюкевич С.И. О нестационарной системе Максвелла в областях с ребрами / С.И. Матюкевич //Алгебра и анализ, 2003. Т.15, вып. 6. - С 86-140.
94. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных/ В.П. Михайлов - М.: Наука, 1983.
95. Моргулис А.Б., Юдович В.И. Асимптотическая устойчивость стационарного режима протекания идеальной несжимаемой жидкости/ А.В. Моргулис, В.И. Юдович// Сибирский математический журнал, 2002. Т. 43, № 4. - С 840-857
96. Мукминов Ф.Х. Об убывании решений первой смешанной задачи для линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса в области с некомпактной границей/ Ф.Х. Мукминов// Математический сборник, 1992. Т. 183, № 10. - С. 123-144.
97. Мукминов Ф.Х. О скорости убывания сильного решения первой смешанной задачи для системы уравнений Навье-Стокса в областях с некомпактными границами/ Ф.Х. Мукминов// Математический сборник, 1993. Т. 184, № 4. - С. 139 - 160.
98. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики/ В.В. Никольский - М: Наука, 1967.

99. Никольский В.В., Никольская Т.Н. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики/ В.В. Никольский, Т.Н. Никольская - М.: Наука, 1983.
100. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения/ С.М. Никольский - М.: Наука, 1977.
101. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу/ Л. Ниренберг - М.: Мир, 1977.
102. Обен Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач/ Ж.-П. Обен - М.: Мир, 1977.
103. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред/ Дж. Оден - М.: Мир, 1981.
104. Олейник О.А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами/ О.А. Олейник// Известия АН СССР, серия математическая, 1961. Т. 25, № 1. С. 3-20.
105. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред/ О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев - М.: Изд. МГУ, 1990.
106. Ольшанский М.А. О задаче Стокса с модельными краевыми условиями/ М.А.Ольшанский// Математический сборник, 1997. Т. 188, № 4. - С. 127-144.
107. Петунин И.М. Об асимптотической оценке решений первой краевой задачи в полупространстве для уравнений движения вязкой вращающейся жидкости/ И.М. Петунин// Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. М.: УДН, 1983. - С. 64-85.
108. Пилецкас К. Об асимптотике решений стационарной системы уравнений Навье-Стокса в области типа слоя/К. Пилецкас// Математический сборник, 2002. Т. 193, № 12. - С. 69-104.
109. Плотницкий Т.А. О некоторых свойствах операторов векторного анализа в пространствах С.Л. Соболева/ Т.А. Плотницкий// Краевые задачи электродинамики проводящих сред/ Под ред. Ю.А. Митропольского. - Киев: Изд. ИМ АН УССР, 1976. - С. 149-165.
110. Попов Ю.П. К расчету магнитодинамических ударных волн, ионизирующих газ/ Ю.П. Попов// ЖВМ и МФ - 1970. Т.10, № 5. - С. 1238-1248.
111. Ривкинд В.Я., Фридман Н.Б. Об уравнениях Навье-Стокса с разрывными коэффициентами/ В.Я. Ривкинд, Н.Б. Фридман// Записки научного семинара ЛОМИ, 1973. Т. 38, № 7. С. 137-148.

112. Ривкинд В.Я., Эпштейн Б.С. Проекционные сеточные схемы для решения уравнений Навье-Стокса в ортогональных криволинейных системах координат/ В.Я. Ривкинд, Б.С. Эпштейн// Вестник ЛГУ, 1974.Т.3,№13. -С. 46-53.
113. Рихтмайер Р.Д., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач/ Р.Д. Рихтмайер, К. Мартон - М: Мир, 1972.
114. Рохкинд И.И. Нестационарная дифракция электромагнитных волн/ И.И. Рохкинд// Вестник ЛГУ, 1958. №7. С. 109-124.
115. Самарский А.А. Теория разностных схем/ А.А. Самарский - М.; Наука, 1978.
116. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решений сеточных уравнений / А.А. Самарский, Е.С. Николаев - М.: Наука, 1978.
117. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики/ А.А. Самарский, Ю.П. Попов- М.: Наука, 1980.
118. Самохин А.Б. Интегральные уравнения для нестационарных задач электродинамики в материальных средах/ А.Б. Самохин// Дифференциальные уравнения, 2002. Т. 38, № 9. - С. 1288-1290.
119. Самохин А.Б. Метод решения внутренних задач электродинамики/ А.Б. Самохин // Дифференциальные уравнения, 1997. Т. 33, № 9. С. 1291-1292.
120. Самохин В.Н. О стационарных задачах магнитной гидродинамики неньютоновских сред/ В.Н. Самохин// Сибирский математический журнал, 1992. Т. 33, № 4. - С. 120-127.
121. Сахаев Ш. Разрешимость некоторых нестационарных задач электродинамики и магнитной гидродинамики в пространствах $W_{\text{рхт}}^{21}(Q_T)$, $p>1$ и $C_{\text{хт}}^{2+a,1+a/2}(Q_T)$ / Ш. Сахаев// Теоремы вложения и приложения. Материалы Всес. симп. Алма-Ата, 1973, - Алма-Ата: Наука Каз. ССР, 1976. С.140-145.
122. Светов Б.С, Губатенко В.П. Аналитические решения электродинамических задач/ Б.С. Светов, В.П. Губатенко -М.: Наука, 1988.
123. Свешников А.Г. Обоснование метода исследования распространения электромагнитных колебаний в волноводах с анизотропным заполнением/ А.Г. Свешников// ЖВМ и МФ, 1963. Т.3, № 5. - С. 953-955.
124. Сливняк И.М. О краевых задачах для уравнения Максвелла/ И.М. Сливняк// Математический сборник, 1954. Т. 35, № 3. - С. 369-394.
125. Слободецкий Л.Н. Оценки в L_p решений эллиптических систем/ Л.Н. Слободецкий// Доклады АН СССР, 1958. Т. 123, №4. -С. 616-619.

126. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике/ С.Л. Соболев - М.: Наука, 1988.
127. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики/ С.Л. Соболев // Известия АН СССР, серия математическая, 1954. Т. 18, № 1. - С. 3-50.
128. Соболев С.Л. Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений/ С.Л. Соболев // Математический сборник, 1937. Т.2, № 3. - С. 465-500.
129. Соболев С.Л. Плотность финитных функций в пространстве $L_p^m(E_n)$ / С.Л. Соболев// Сибирский математический журнал, 1963. Т. 4, № 3. С. 673-682.
130. Солонников В.А. О дифференциальных свойствах решения первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье-Стокса/ В.А. Солонников // Труды МИ АН СССР, 1964. Т. 73.-С. 221-291.
131. Солонников В.А. О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики/ В.А. Солонников // Труды МИ АН СССР, 1960. Т. 59. - С. 174-187.
132. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса/ В.А. Солонников // Труды МИ АН СССР, 1964. Т. 70. - С. 213-317.
133. Солонников В.А., Щадилов В.Е. Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье-Стокса/ В.А. Солонников, В.Е. Щадилов // Труды МИ АН СССР, 1973, Т. 125. С. 196-2101.
134. Солонников В.А. О краевой задаче с разрывными краевыми условиями для уравнений Стокса и Навье-Стокса в трехмерном случае/ В.А. Солонников// Алгебра и анализ, 1993. Т. 6, №3.-С. 252-270.
135. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов/ Г. Стренг, Дж. Фикс - М.: Мир, 1977.
136. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма/ Дж.А. Стрэттон - Л.: Гостехиздат, 1948.
137. Тамм И. Е. Основы теории электричества/ И.Е. Тамм - М.: Наука, 1976.
138. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ/ Р. Темам - М.: Мир, 1981.
139. Темам Р. Математические задачи теории пластичности/ Р. Темам - М.: Наука, 1991.
140. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач/ А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин - М.: Наука, 1979.
141. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных разностных схемах/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // ЖВМ и МФ, 1961.Т.1,№1. -С. 5-63.

142. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский - М.: Наука, 1972.
143. Тозони О.Б. Математические модели для расчета электрических и магнитных полей/ О.Б. Тозони - Киев: Наукова думка, 1964.
144. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды/ В.В. Толмачев, А.М. Головин, В.С. Потапов - М.: Изд.-во МГУ, 1988.
145. Уральцева Н.Н. О регулярности решений многомерных эллиптических уравнений и вариационных задач/ Н.Н. Уральцева// Доклады АН СССР, 1960. Т. 130, № 6. С. 1206-1209.
146. Уральцева Н.Н. О невозможности W_q^2 оценок для многомерных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами/ Н.Н. Уральцева// Записки научных семинаров ЛОМИ, 1961. Т. 5. С. 250-257.
147. Фадеев Д.К., Вулих Б.З., Уральцева Н.Н. Избранные главы анализа и высшей алгебры / Д.К. Фадеев, Б.З. Вулих, Н.Н. Уральцева -Л.: Изд.-во ЛГУ, 1981.
148. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика/ Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс - М.: Мир, 1966.
149. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции/ Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль - М.: Мир, 1964.
150. Шефтель З.Г. Оценки в L_p решений эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, удовлетворяющих общим граничным условиям и условиям сопряжения/ З.Г. Шефтель// Доклады АН СССР, 1963. Т. 149, № 1. - С. 48-51.
151. Чижонков Е.В. Об одной системе уравнений типа магнитной гидродинамики/ Е.В. Чижонков // Доклады АН СССР, 1984. Т. 278, №5. - С. 1074-1077.
152. Чижонков Е.В. О сходимости одного алгоритма для решения задачи Стокса/ Е.В. Чижонков// Вестник МГУ, сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика, 1995. № 2. - С. 12-17.
153. Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости/ В.И. Юдович// ЖВМ и МФ, 1963. Т. 3, № 6. - С. 1032-1066.
154. Юдович В.И. Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости/ В.И. Юдович// Доклады АН СССР, 1960. Т. 130. -С. 1214-1217.
155. Юдович В.И. Двумерная нестационарная задача протекания идеальной несжимаемой жидкости через заданную область/ В.И. Юдович// Математический сборник, 1964. Т. 64, № 4. - С. 562-588.

156. Эйдуc Д.М. О существовании нормальной производной решения задачи Дирихле / Д.М. Эйдуc// Вестник Ленинградского университета: Сер. матем., мех. и астрономии, 1956. № 13, Вып.3.-С.147-150.
157. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I/ S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math., 1959. V. 12. - P. 623-727.
158. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math., 1964. V. 17.-P. 35-92.
159. Agoshkov V., Bardos C, Buleev S. Solution of the Stokes problem as an inverse problem/ V. Agoshkov, C. Bardos, S. Buleev // Computational methods in applied mathematics. V. 2, 2002. № 36. - P. 213-232.
160. Browder F.E. Nonlinear elliptic boundary value problems/ F.E. Browder // Bull. Amer. Math. Soc, 1963. V 69. - P. 862-874.
161. Fois C, Temam R. Structure of the set of stationary solutions of the Navier Stokes equations/ C. Fois, R. Temam// Comm Pure Appl. Math., 1977. V. 30. - P. 149-164.
162. Friedrichs K. O. Differential forms on Riemannian manifolds / K.O. Friedrichs // Comm. pure and appl. math. -1955.-V. 8.-P. 551-590.
163. Girault V., Raviart P. Finite element methods for Navier-Stokes Equations/ V. Girault, P. Raviart - Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New-York/ Tokyo, 1986.
164. Glowinski R. Numerical methods for nonlinear variational problems/ R. Glowinski - New York: Springer, 1984.
165. Gunzburger M.D., Meir A.J., Peterson J.S. On the existence, uniqueness and finite element approximation of solution of the equations of stationary, incompressible magnetohydrodynamics/ M.D. Gunzburger, A.J. Meir, J.S. Peterson// Math. Como. 1991. V. 56, № 194. P. 563- 583.
166. Heywood J. G. The exterior nonstationary problem for the Navier - Stokes equations/ J.G. Heywood// Acta Math., 1972. V. 129. P. 11-34.
167. Heywood J. G. On uniqueness questions in the theory of viscous flow/J. G. Heywood// Acta Math., 1974. 136,1974, P. 443-450.
168. Kato T. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equations in R^m , with applications to weak solutions/ T. Kato// Math. Z. 1984. V. 187. P. 471-480.

169. Kawashima S., Shizuta Y. Magnetohydrodynamic Approximation of the Complete Equations for an Electromagnetic Fluid. II/ S. Kawashima, Y. Shizuta // Proc. Japan Acad. - 1986. V 62. Ser. A, № 5.-P. 181-184.
170. Leray J. Etude de diverses equations integrales nonlineaires et de quelques problemes que pose rhydrodynamique/ J. Leray //J. Math. Pures et Appl., 1933. V. 12. - P. 1-82.
171. Leray J. Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois/ J. Leray // J. Math. Pures et Appl., 1934. V. 13. - P. 331-418.
172. Leray J. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace/ J. Leray// Acta Math., 1934. V. 63. -P. 193-248.
173. Lions J.-L., Stampacchia G. Variational inequalities/ J.-L. Lions, G. Stampacchia// Comm. Pure Appl. Math., 1967. V. 20.-P.493-519.
174. Meir A.J., Schmidt G. Analysis and numerical approximation of a stationary MHD flow problem with nonideal boundary/ A. Meir, G. Schmidt// SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 36, № 4. - P.1304-1332.
175. Schmidt G. Spectral and scattering theory for Maxwell's equations in an exterior domain/ G. Schmidt// Arch. Rat. Mech. Anal, 1968. V. 28. - P. 284-322.
176. Sermange M., Temam R. Some mathematical questions related to the MHD equations/ M. Sermange, R. Temam// Comm. Pure Appl. Math., 1983. V. 36. - P. 635-664.
177. Schonbek M.E. L2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations/ M.E. Schonbek// Arch. Hation. Mech. and Anal. 1986. V. 88. - P. 209-222.
178. Schonbek M.E. Large time behavior of solutions to the Navier-Stokes equations/ M.E. Schonbek // Comm. Partial Differential Equations. 1986. V. 11 - P. 733-763.
179. Week V. Maxwell's boundary value problem on Riemannian manifolds with nonsmooth boundaries/ V. Week//J. of Math, analysis and appl., 1974. V. 46, № 2. - P. 410-437.
180. Wiedmer M. Finite element approximation for equations of magnetohydrodynamics/ M. Wiedmer // Math. Corp. 1999. V. 69, №229. - P. 83-101.
181. Wiegner M. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equation / M. Wiegner// J. London Math. Soc. 1987. V.36. - P. 303-313.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНКИ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Устанавливаются неравенства, оценивающие скалярные произведения векторных полей через нормы их ротора и дивергенции в L_p -пространствах, необходимые для доказательства разрешимости краевых и начально-краевых задач. Полученные оценки основаны на представлениях гладких вектор-функций в звездных областях, обобщенных для интегрируемых вектор-функций.

Представления вектор-функций в звездных областях

Пусть $\Omega \subset R^3$ - открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$, звездное относительно некоторой точки $\dot{y} \in \Omega$. Для $t \in [0,1]$, $\dot{x} \in \Omega$ обозначаем $\dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y}) = \dot{y} + t(\dot{x} - \dot{y}) \in \Omega$. Полагаем также $r(\dot{x}) = |\dot{x} - \dot{y}|$, $\dot{s}(\dot{x}) = (\dot{x} - \dot{y})/r(\dot{x}) \in S$, где S - единичная сфера в R^3 , $S = \{\dot{x} \in R^3 : |\dot{x}| = 1\}$.

Сформулированные в теореме П.1 представления были предложены в [39].

Теорема П.1. Для всех функций $\dot{u} \in \{C^1(\Omega)\}^3$ справедливы тождества:

$$\dot{u}(\dot{x}) = \text{grad}_{\dot{x}} \left\{ \int_0^1 \dot{u}(\dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})) \cdot (\dot{x} - \dot{y}) dt \right\} + \int_0^1 t [\text{rot}_{\dot{z}} \dot{u}(\dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})) \times (\dot{x} - \dot{y})] dt \quad (\text{п.1})$$

$$\dot{u}(\dot{x}) = \text{rot}_{\dot{x}} \left\{ \int_0^1 t [\dot{u}(\dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})) \times (\dot{x} - \dot{y})] dt \right\} + \int_0^1 t^2 (\dot{x} - \dot{y}) \text{div}_{\dot{z}} \dot{u}(\dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})) dt, \quad (\text{п.2})$$

где $\text{rot}_{\dot{z}} \dot{u}(\dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})) = \text{rot}_{\dot{z}} \dot{u}(\dot{z})$ в точке $\dot{z} = \dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})$, $\text{div}_{\dot{z}} \dot{u}(\dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})) = \text{div}_{\dot{z}} \dot{u}(\dot{z})$ в точке $\dot{z} = \dot{z}_t(\dot{x}, \dot{y})$.

Справедливость тождеств (п.1), (п.2) проверяется непосредственно.

Если в интегралах тождеств (п.1), (п.2) сделать замену $x = tr$, то они запишутся в виде

$$\dot{u}(\dot{x}) = \text{grad}_{\dot{x}} \left\{ \int_0^r \dot{u}(\dot{y} + x\dot{s}) \cdot \dot{s} dx \right\} + \frac{1}{r} \int_0^r x [\text{rot} \dot{u}(\dot{y} + x\dot{s}) \times \dot{s}] dx \quad (\text{п.3})$$

$$\dot{u}(\dot{x}) = \text{rot}_{\dot{x}} \left\{ \int_0^r x [\dot{u}(\dot{y} + x\dot{s}) \times \dot{s}] dx \right\} + \frac{\dot{s}}{r^2} \int_0^r x^2 \text{div} \dot{u}(\dot{y} + x\dot{s}) dx \quad (\text{п.4})$$

Следствие. Для всех функций $\dot{u} \in \{C^2(\Omega)\}^3$, $j \in C^2(\Omega)$ справедливы тождества

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^1 t [\operatorname{rot}_{\mathbf{z}} \mathbf{u}(\mathbf{z}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] dt \right\} = \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r x [\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{y} + x\mathbf{s}) \times \mathbf{s}] dx \right\}, \quad (\text{п.5})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^1 t^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{u}(\mathbf{z}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})) dt \right\} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{\mathbf{s}}{r^2} \int_0^r x^2 \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{y} + x\mathbf{s}) dx \right\}, \quad (\text{п.6})$$

$$\operatorname{grad} j(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^1 (\operatorname{grad} j(\mathbf{z}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) dt \right\} = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^r (\operatorname{grad} j(\mathbf{y} + x\mathbf{s}) \cdot \mathbf{s}) dx \right\}, \quad (\text{п.7})$$

Полученные тождества следуют из (п.1) - (п.4) с учетом (1.7).

Обобщим представления (п.1), (п.2) для интегрируемых функций. Определим для каждого $m > -1$ и для функций $j \in C(\overline{\Omega})$, $\mathbf{f} \in \{C(\overline{\Omega})\}^3$ функции $Q_m(j): \Omega \rightarrow R^1$, $\dot{Q}_m(\mathbf{f}): \Omega \rightarrow R^3$ соответственно соотношениями

$$Q_m(j)(\mathbf{x}) = r^{-m} \int_0^r x^m j(\mathbf{y} + x\mathbf{s}) dx, \\ \dot{Q}_m(\mathbf{f})(\mathbf{x}) = r^{-m} \int_0^r x^m \mathbf{f}(\mathbf{y} + x\mathbf{s}) dx. \quad (\text{п.8})$$

С использованием обозначений (п.8) тождества (п.3), (п.4) примут соответственно вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}(\dot{Q}_0(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{s})(\mathbf{x}) + [\dot{Q}_1(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \times \mathbf{s}](\mathbf{x}), \quad (\text{п.9})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}[\dot{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}](\mathbf{x}) + \mathbf{s} Q_2(\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}), \quad (\text{п.10})$$

Лемма П.1. При всех $m > -1$, $p > \max\{1, 3/(m+1)\}$ существует такая постоянная $C_m(q, \Omega) > 0$, зависящая только от m , p и области Ω , что для любых $j \in C(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство

$$\|Q_m(j)\|_{p, \Omega} \leq C_m(q, \Omega) \|j\|_{p, \Omega}. \quad (\text{п.11})$$

Доказательство. Обозначим $R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y}) = \sup\{r \in R^1 : \mathbf{y} + r\mathbf{s} \in \Omega\}$, $R(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{s} \in S} R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})$, (очевидно, $0 < R(\mathbf{y}) < d(\Omega)$), $d\mathbf{s}^1$ - элемент площади единичной сферы S .

Получаем, применяя неравенство Гельдера

$$|Q_m(j)(\mathbf{x})| \leq r^{-m} \int_0^r x^m |j(\mathbf{y} + x\mathbf{s})| dx = r^{-m} \int_0^r x^{m-\frac{2}{p}} x^{\frac{2}{p}} |j(\mathbf{y} + x\mathbf{s})| dx \leq \\ \leq \left(\frac{p-1}{p(m+1)-3} \right)^{\frac{p-1}{p}} r^{\frac{p-3}{p}} \left\{ \int_0^r x^2 |j(\mathbf{y} + x\mathbf{s})|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Положим $A = \left(\frac{q-1}{q(m+1)-n} \right)^{(q-1)/q}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|Q_m(j)\|_{p,\Omega}^p &= \int_S d\mathbf{s} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} r^2 |Q_m(j)(\mathbf{y} + r\mathbf{s})|^p dr \leq A^p \int_S d\mathbf{s} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} r^{p-1} \int_0^r x^2 |j(\mathbf{y} + x\mathbf{s})|^p dx dr \leq \\ &\leq A^p \int_S d\mathbf{s} \frac{R_{\mathbf{s}}^p(\mathbf{y})}{p} \int_0^{R_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})} x^2 |j(\mathbf{y} + x\mathbf{s})|^p dx \leq A^p \frac{R^p(\mathbf{y})}{p} \|j\|_{p,\Omega}^p. \end{aligned}$$

Обозначив $C_m(p, \Omega) = \left(\frac{p-1}{p(m+1)-3} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{R(\mathbf{y})}{p^{1/p}}$, получим (п.11).

Установленные в лемме П.1 неравенства показывают, что оператор Q_m , рассматриваемый как отображение из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ при $p > \max\left\{1, \frac{3}{m+1}\right\}$, непрерывен на множестве $C(\overline{\Omega})$, плотном в $L_p(\Omega)$. Следовательно, его можно продолжить до некоторого линейного ограниченного оператора, обозначаемого в дальнейшем также через Q_m , определенного на всем пространстве $L_p(\Omega)$. Оценка (п.11) остается справедливой и для этого оператора.

Для функции $\mathbf{j} \in \{C(\overline{\Omega})\}^3$ получаем, используя обратное неравенство Минковского:

$$\begin{aligned} |Q_m(j)(\mathbf{x})|^2 &= r^{-2m} \left(\sum_{i=1}^3 \left(\int_0^r x^m j_i(\mathbf{y} + x\mathbf{s}) dx \right)^2 \right) \leq r^{-2m} \left(\sum_{i=1}^3 \left(\int_0^r x^m |j_i(\mathbf{y} + x\mathbf{s})| dx \right)^2 \right) \leq \\ &\leq r^{-2m} \left(\int_0^r \left(\sum_{i=1}^3 x^{2m} |j_i(\mathbf{y} + x\mathbf{s})|^2 \right)^{1/2} dx \right)^2 = r^{-2m} \left(\int_0^r x^m |\mathbf{j}(\mathbf{y} + x\mathbf{s})| dx \right)^2 = |Q_m(|\mathbf{j}|)|^2. \end{aligned}$$

Применим лемму П.1 к функции $|j| \in C(\overline{\Omega})$:

$$\|\dot{Q}_m(\mathbf{j})\|_{p,\Omega} \leq \|Q_m(|\mathbf{j}|)\|_{p,\Omega} \leq C_m(p, \Omega) \|\mathbf{j}\|_{p,\Omega} = C_m(p, \Omega) \|\mathbf{j}\|_{p,\Omega}.$$

Таким образом, оператор $\dot{Q}_m : \{L_p(\Omega)\}^3 \rightarrow \{L_p(\Omega)\}^3$ продолжается по непрерывности на пространство $\{L_p(\Omega)\}^3$.

Теорема П.2. Для всех $\mathbf{u} \in H_p(\text{div}; \Omega)$ при $p > 3/2$ справедливо тождество

$$\mathbf{u} = \text{rot}[\dot{Q}_1(\mathbf{u}) \times \mathbf{s}] + \mathbf{s} Q_2(\text{div } \mathbf{u}). \quad (\text{п.12})$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{\bar{u}} \in H_p(\text{div}; \Omega)$, $p > 3/2$. Согласно теореме о плотности, найдется последовательность $\{\mathbf{\bar{u}}_k\} \subset \{D(\bar{\Omega})\}^3$ такая, что $\mathbf{\bar{u}}_k \rightarrow \mathbf{\bar{u}}$ при $k \rightarrow \infty$ в $H_p(\text{div}; \Omega)$. Так как $\|\mathbf{\bar{u}}_k - \mathbf{\bar{u}}\|_{p,\Omega} \leq \|\mathbf{\bar{u}}_k - \mathbf{\bar{u}}\|_{p,\text{div},\Omega}$, $\mathbf{\bar{u}}_k \rightarrow \mathbf{\bar{u}}$ в $\{L_p(\Omega)\}^3$.

Согласно оценке (п.11),

$$\|\mathbf{\bar{s}}Q_2(\text{div } \mathbf{\bar{u}}_k) - \mathbf{\bar{s}}Q_2(\text{div } \mathbf{\bar{u}})\|_{p,\Omega} \leq \|Q_2(\text{div}(\mathbf{\bar{u}}_k - \mathbf{\bar{u}}))\|_{p,\Omega} \leq C_2(p, \Omega) \|\text{div}(\mathbf{\bar{u}}_k - \mathbf{\bar{u}})\|_{p,\Omega},$$

то есть $\mathbf{\bar{s}}Q_2(\text{div } \mathbf{\bar{u}}_k) \rightarrow \mathbf{\bar{s}}Q_2(\text{div } \mathbf{\bar{u}})$ в $\{L_p(\Omega)\}^3$ при $k \rightarrow \infty$.

Из справедливого для всех $\mathbf{\bar{u}}_k$ тождества (2.10) следует, что при $k, l \in N$

$$\|\text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}_k) \times \mathbf{\bar{s}}] - \text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}_l) \times \mathbf{\bar{s}}]\|_{p,\Omega} \leq \|\mathbf{\bar{u}}_k - \mathbf{\bar{u}}_l\|_{p,\Omega} + \|\mathbf{\bar{s}}Q_2(\text{div } \mathbf{\bar{u}}_k) - \mathbf{\bar{s}}Q_2(\text{div } \mathbf{\bar{u}}_l)\|_{p,\Omega},$$

значит последовательность $\{\text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}_k) \times \mathbf{\bar{s}}]\}$ фундаментальна в $\{L_p(\Omega)\}^3$ и, таким образом, сходится к некоторому элементу $\mathbf{\bar{v}} \in \{L_p(\Omega)\}^3$.

С другой стороны, для любой функции $\mathbf{\bar{y}} \in \{D(\Omega)\}^3$

$$\begin{aligned} & \left| \langle \text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}_k) \times \mathbf{\bar{s}}] - \text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}) \times \mathbf{\bar{s}}], \mathbf{\bar{\Psi}} \rangle \right| = \left| \langle [\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}_k) \times \mathbf{\bar{s}}], \text{rot } \mathbf{\bar{\Psi}} \rangle \right| \leq \\ & \leq \|[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}_k - \mathbf{\bar{u}}) \times \mathbf{\bar{s}}]\|_{p,\Omega} \|\text{rot } \mathbf{\bar{\Psi}}\|_{q,\Omega} \leq C_1(p, \Omega) \|\mathbf{\bar{u}}_k - \mathbf{\bar{u}}\|_{p,\Omega} \|\text{rot } \mathbf{\bar{\Psi}}\|_{q,\Omega}, \end{aligned}$$

где $q = p/(p-1)$, то есть $\text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}_k) \times \mathbf{\bar{s}}] \rightarrow \text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}) \times \mathbf{\bar{s}}]$ в пространстве распределений.

В силу единственности предела, функции $\text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}) \times \mathbf{\bar{s}}]$ и $\mathbf{\bar{v}}$ определяют одинаковые распределения, следовательно, $\text{rot}[\mathbf{\bar{Q}}_1(\mathbf{\bar{u}}) \times \mathbf{\bar{s}}] = \mathbf{\bar{v}} \in \{L_p(\Omega)\}^3$ и утверждение теоремы получаем с помощью предельного перехода.

Замечание. Из доказательства теоремы П.2 видно, что тождество (п.12) будет справедливым для всех $\mathbf{\bar{u}} \in \{L_p(\Omega)\}^3$, $p > 3/2$, таких, что $\text{div } \mathbf{\bar{u}} \in L_1(\Omega)$.

Теорема П.3. Для всех $\mathbf{\bar{u}} \in H_p(\text{rot}; \Omega)$ при $p > 3/2$ найдется такая функция $Q(\mathbf{\bar{u}}) \in L_p(\Omega)$, что справедливо тождество

$$\mathbf{\bar{u}} = \text{grad } Q(\mathbf{\bar{u}}) + [\mathbf{\bar{Q}}_1(\text{rot } \mathbf{\bar{u}}) \times \mathbf{\bar{s}}], \quad (\text{п.13})$$

причем, если $p > 3$, можно взять $Q(\mathbf{\bar{u}}) = (\mathbf{\bar{Q}}_0(\mathbf{\bar{u}}) \cdot \mathbf{\bar{s}})$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{\bar{u}} \in H_p(\text{rot}; \Omega)$, $p > 3/2$. Согласно теореме 1.7, найдется последовательность $\{\mathbf{\bar{u}}_k\} \subset \{D(\bar{\Omega})\}^3$ такая, что $\mathbf{\bar{u}}_k \rightarrow \mathbf{\bar{u}}$ при $k \rightarrow \infty$ в $H_p(\text{rot}; \Omega)$ и, следовательно, $\mathbf{\bar{u}}_k \rightarrow \mathbf{\bar{u}}$, $\text{rot } \mathbf{\bar{u}}_k \rightarrow \text{rot } \mathbf{\bar{u}}$ в $\mathbf{\bar{u}} \in \{L_p(\Omega)\}^3$.

Для всех $\dot{\mathbf{u}}_k$ справедливо тождество (п.9).

Согласно лемме П.1, $\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{u}}) \in \{L_p(\Omega)\}^3$ и

$$\left\| \left[\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{u}}_k) \times \dot{\mathbf{s}} \right] - \left[\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{u}}) \times \dot{\mathbf{s}} \right] \right\|_{p,\Omega} \leq C_1(p, \Omega) \|\text{rot } \dot{\mathbf{u}}_k - \text{rot } \dot{\mathbf{u}}\|_{p,\Omega},$$

то есть $\left[\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{u}}_k) \times \dot{\mathbf{s}} \right] \rightarrow \left[\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{u}}) \times \dot{\mathbf{s}} \right]$ при $k \rightarrow \infty$ в $\{L_p(\Omega)\}^3$.

Последовательность $\left\{ \text{grad}(\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{u}}_k) \cdot \dot{\mathbf{s}}) \right\}$, таким образом, фундаментальна в $\{L_p(\Omega)\}^3$ и, следовательно, сходится к некоторому элементу $\dot{\mathbf{v}} \in \{L_p(\Omega)\}^3$.

Пусть $\dot{\mathbf{y}} \in \{D(\Omega)\}^3$ такова, что $\text{div } \dot{\mathbf{y}} = 0$. Тогда

$$\langle \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{y}} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \text{grad}(\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{u}}_k) \cdot \dot{\mathbf{s}}), \dot{\mathbf{y}} \rangle = 0.$$

Применяя лемму 1.17 получим, что $\dot{\mathbf{v}} = \text{grad } Q(\dot{\mathbf{u}})$, где функция $Q(\dot{\mathbf{u}})$ определена с точностью до аддитивной константы и лежит в $L_p(\Omega)$ согласно неравенству Пуанкаре.

Если $p > 3$, то для любой функции $\dot{\mathbf{j}} \in \{D(\Omega)\}^3$, применяя лемму П.1, получаем, что последовательность $\left\{ \text{grad}(\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{u}}_k) \cdot \dot{\mathbf{s}}) \right\}$ сходится к $\text{grad}(\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{s}})$ в пространстве распределений. Таким образом, $\text{grad}(\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{s}}) = \text{grad } Q(\dot{\mathbf{u}})$, поэтому можно считать $Q(\dot{\mathbf{u}}) = (\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{s}})$. Равенство (п.13) устанавливаем, переходя к пределу в (п.9).

Теоремы П.2, П.3 имеют следующие очевидные следствия.

Лемма П.2. Пусть $p > 3/2$. Для всех $\dot{\mathbf{u}} \in H_p(\text{div}; \Omega)$ функция $\left[\dot{Q}_1(\dot{\mathbf{u}}) \times \dot{\mathbf{s}} \right]$ лежит в $H_p(\text{rot}; \Omega)$, для всех $\dot{\mathbf{u}} \in H_p(\text{rot}; \Omega)$ функция $Q(\dot{\mathbf{u}})$, определяемая в теореме П.3, лежит в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$.

Основные неравенства

Пусть $\Omega \subset R^3$ - открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$, звездное относительно некоторой точки.

Теорема П.4. Если $p > 3/2$, $q = p/(p-1)$, то существует такая постоянная $C_1 > 0$, зависящая только от p и области Ω , что для любых $\dot{\mathbf{v}} \in H_p(\text{rot}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{u}} \in H_q^0(\text{div}; \Omega)$, справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \right| \leq C_1 \left(\|\dot{\mathbf{u}}\|_{q,\Omega} \|\text{rot } \dot{\mathbf{v}}\|_{p,\Omega} + \|\dot{\mathbf{v}}\|_{p,\Omega} \|\text{div } \dot{\mathbf{u}}\|_{q,\Omega} + \|\text{div } \dot{\mathbf{u}}\|_{q,\Omega} \|\text{rot } \dot{\mathbf{v}}\|_{p,\Omega} \right). \quad (\text{п.14})$$

Доказательство. Пусть $\vec{v} \in H_p(\text{rot}; \Omega)$, $\vec{u} \in H_q^0(\text{div}; \Omega)$. По определению пространства $H_q^0(\text{div}; \Omega)$ найдется последовательность $\{\vec{y}_m\} \in \{D(\Omega)\}^3$ такая, что $\vec{y}_m \rightarrow \vec{u}$ при $m \rightarrow \infty$ по норме $H_q^0(\text{div}; \Omega)$.

Согласно теореме П.3, существует функция $Q(\vec{v}) \in W^{1,p}(\Omega)$ такая, что

$$\vec{v} = \text{grad } Q(\vec{v}) + [\vec{Q}_1(\text{rot } \vec{v}) \times \vec{s}],$$

при этом ввиду леммы 1.21, найдется число C^* такое, что

$$\|Q(\vec{v}) - C^*\|_{p,\Omega} \leq A(p, \Omega) \|\text{grad } Q(\vec{v})\|_{p,\Omega}.$$

Получаем, следовательно,

$$\begin{aligned} \|Q(\vec{v}) - C^*\|_{p,\Omega} &\leq A(p, \Omega) \left(\|\vec{v}\|_{p,\Omega} + \|\vec{Q}_1(\text{rot } \vec{v})\|_{p,\Omega} \right) \leq \\ &\leq A(p, \Omega) \left(\|\vec{v}\|_{p,\Omega} + C_1(\Omega, p) \|\text{rot } \vec{v}\|_{p,\Omega} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $m \in N$, применяя неравенство Гельдера с показателями p и q и оценки (П.11), имеем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\vec{v} \cdot \vec{y}_m) d\vec{x} \right| &= \left| \int_{\Omega} (\vec{y}_m \cdot \text{grad } \{Q(\vec{v}) - C^*\}) d\vec{x} + \int_{\Omega} ([\vec{Q}_1(\text{rot } \vec{v}) \times \vec{s}] \cdot \vec{y}_m) d\vec{x} \right| \leq \\ &\leq A(\Omega, p) \|\text{div } \vec{y}_m\|_{q,\Omega} \left(\|\vec{v}\|_{p,\Omega} + C_1(\Omega, p) \|\text{rot } \vec{v}\|_{p,\Omega} \right) + C_1(\Omega, p) \|\text{rot } \vec{v}\|_{p,\Omega} \|\vec{y}_m\|_{q,\Omega}. \end{aligned}$$

Положив $C_1 = \max\{A(\Omega, p), C_1(\Omega, p), A(\Omega, p)C_1(\Omega, p)\}$ и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем неравенство (п.14).

Следствие. Если выполнены условия теоремы П.4, для любых $\vec{v} \in H_p(\text{rot}; \Omega)$ и $\vec{u} \in H_q^0(\text{div}; \Omega)$ таких, что $\text{div } \vec{u} = 0$, справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} \right| \leq \left(\frac{p-1}{2p-3} \right)^{(p-1)/p} \frac{d(\Omega)}{p^{1/p}} \|\vec{u}\|_{q,\Omega} \|\text{rot } \vec{v}\|_{p,\Omega}. \quad (\text{п.15})$$

Теорема П.5. Пусть $p > 3$, $q = p/(p-1)$. Существует такая положительная постоянная C_2 , зависящая только от p и области Ω , что при любых $\vec{u} \in H_q^0(\text{div}; \Omega)$, $\vec{v} \in H_p(\text{rot}; \Omega)$ будет справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} \right| \leq C_2 \left(\|\vec{u}\|_{q,\Omega} \|\text{rot } \vec{v}\|_{p,\Omega} + \|\vec{v}\|_{p,\Omega} \|\text{div } \vec{u}\|_{q,\Omega} \right). \quad (\text{п.16})$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{\vec{y}_m\} \in \{D(\Omega)\}^n$ такова, что $\vec{y}_m \rightarrow \vec{u}$ при $m \rightarrow \infty$ по норме $H_q^0(\text{div}; \Omega)$. По теореме П.3,

$$\dot{\mathbf{v}} = \text{grad}(\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{v}}) \cdot \dot{\mathbf{s}}) + [\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{v}}) \times \dot{\mathbf{s}}].$$

Используя неравенство Гельдера и оценки (п.11), получаем для всех $m \in N$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{y}}_m) d\dot{\mathbf{x}} \right| &= \left| \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{y}}_m \cdot \text{grad}(\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{v}}) \cdot \dot{\mathbf{s}})) d\dot{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} ([\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{v}}) \times \dot{\mathbf{s}}] \cdot \dot{\mathbf{y}}_m) d\dot{\mathbf{x}} \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega} (\dot{Q}_0(\dot{\mathbf{v}}) \cdot \dot{\mathbf{s}}) \text{div } \dot{\mathbf{y}}_m d\dot{\mathbf{x}} \right| + \int_{\Omega} |[\dot{Q}_1(\text{rot } \dot{\mathbf{v}}) \times \dot{\mathbf{s}}] \cdot \dot{\mathbf{y}}_m| d\dot{\mathbf{x}} \leq \\ &\leq C_0(p, \Omega) \|\dot{\mathbf{v}}\|_{p, \Omega} \|\text{div } \dot{\mathbf{y}}_m\|_{q, \Omega} + C_1(\Omega, p) \|\text{rot } \dot{\mathbf{v}}\|_{p, \Omega} \|\dot{\mathbf{y}}_m\|_{q, \Omega}. \end{aligned}$$

Положим $C_2 = C_0(\Omega, p) = \left(\frac{p-1}{p-3} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{R(\dot{\mathbf{y}})}{p^{1/p}}$. Тогда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$,

получим (п.16).

Теорема П.6. Пусть $p > 3/2$, $q = p/(p-1)$. Найдется такая положительная постоянная C_3 , зависящая только от области Ω и p , что при любых $\dot{\mathbf{v}} \in H_p(\text{div}; \Omega)$, $\dot{\mathbf{u}} \in H_q^0(\text{rot}; \Omega)$, будет справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) d\dot{\mathbf{x}} \right| \leq C_3 (\|\dot{\mathbf{u}}\|_{q, \Omega} \|\text{div } \dot{\mathbf{v}}\|_{p, \Omega} + \|\text{rot } \dot{\mathbf{u}}\|_{q, \Omega} \|\dot{\mathbf{v}}\|_{p, \Omega}). \quad (\text{п.17})$$

Доказательство. По определению пространства $H_q^0(\text{rot}; \Omega)$ найдется последовательность $\{\dot{\mathbf{y}}_m\} \in \{D(\Omega)\}^n$ такая, что $\dot{\mathbf{y}}_m \rightarrow \dot{\mathbf{u}}$ при $m \rightarrow \infty$ по норме $H_q(\text{rot}; \Omega)$.

Согласно теореме П.2,

$$\dot{\mathbf{v}} = \text{rot}[\dot{Q}_1(\dot{\mathbf{v}}) \times \dot{\mathbf{s}}] + \dot{\mathbf{s}} Q_2(\text{div } \dot{\mathbf{v}}),$$

то есть для любого $m \in N$

$$\int_{\Omega} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{y}}_m) d\dot{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} ([\dot{Q}_1(\dot{\mathbf{v}}) \times \dot{\mathbf{s}}] \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{y}}_m) d\dot{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} Q_2(\text{div } \dot{\mathbf{v}}) (\dot{\mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{y}}_m) d\dot{\mathbf{x}}.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями p, q и оценки (п.11), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{y}}_m) d\dot{\mathbf{x}} \right| &\leq \left\{ \int_{\Omega} |\dot{Q}_1(\dot{\mathbf{v}})|^p d\dot{\mathbf{x}} \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\Omega} |\text{rot } \dot{\mathbf{y}}_m|^q d\dot{\mathbf{x}} \right\}^{1/q} + \left\{ \int_{\Omega} |Q_2(\text{div } \dot{\mathbf{v}})|^p d\dot{\mathbf{x}} \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\Omega} |\dot{\mathbf{y}}_m|^q d\dot{\mathbf{x}} \right\}^{1/q} \leq \\ &\leq C_1(p, \Omega) \|\dot{\mathbf{v}}\|_{p, \Omega} \|\text{rot } \dot{\mathbf{y}}_m\|_{q, \Omega} + C_2(p, \Omega) \|\dot{\mathbf{y}}_m\|_{q, \Omega} \|\text{div } \dot{\mathbf{v}}\|_{p, \Omega}. \end{aligned}$$

Положив $C_3 = C_1(\Omega, p) = \left(\frac{p-1}{2p-3} \right)^{\frac{p-1}{p}} \frac{R(\dot{\mathbf{y}})}{p^{1/p}}$ и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

оценку (п.17).

Следствие. Если выполнены условия теоремы П.6, для любых $\mathbf{v} \in H_p(\text{div}; \Omega)$ и $\mathbf{u} \in H_q^0(\text{rot}; \Omega)$ таких, что $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} \right| \leq 3^{\frac{p-1}{p}} \frac{d(\Omega)}{p^{1/p}} \|\mathbf{u}\|_{q,\Omega} \|\text{div } \mathbf{v}\|_{p,\Omega}. \quad (\text{п.18})$$

Замечание. Ввиду теоремы о плотности, неравенства (п.14)-(п.18) можно было бы доказать для гладких функций, используя представления (п.1), (п.2) и не привлекая теоремы П.2, П.3.

Пусть теперь $\Omega \subset R^3$ – произвольная ограниченная область. Справедлива

Теорема П.7. (теорема Юнга, [28]) Каждое открытое множество $\Omega \subset R^n$ с диаметром $d(\Omega) > 0$ принадлежит некоторому открытому шару $B_R(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in R^n : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R\}$, где

$$R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} d(\Omega). \quad (\text{п.19})$$

Теорема П.8. Пусть $p > 1$, $q = p/(p-1)$. Если $p \neq 3$, то найдется такая положительная постоянная C_4 , что для всех $\mathbf{u} \in H_q^0(\text{div}; \Omega)$, $\mathbf{v} \in H_p^0(\text{rot}; \Omega)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} \right| \leq C_4 (\|\mathbf{u}\|_{q,\Omega} \|\text{rot } \mathbf{v}\|_{p,\Omega} + \|\mathbf{v}\|_{p,\Omega} \|\text{div } \mathbf{u}\|_{q,\Omega}). \quad (\text{п.20})$$

При $p = 3$ найдется постоянная $C_5 > 0$ такая, для всех $\mathbf{u} \in H_q^0(\text{div}; \Omega)$, $\mathbf{v} \in H_p^0(\text{rot}; \Omega)$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x} \right| \leq C_5 (\|\mathbf{u}\|_{q,\Omega} \|\text{rot } \mathbf{v}\|_{p,\Omega} + \|\mathbf{v}\|_{p,\Omega} \|\text{div } \mathbf{u}\|_{q,\Omega} + \|\text{rot } \mathbf{v}\|_{p,\Omega} \|\text{div } \mathbf{u}\|_{q,\Omega}). \quad (\text{п.21})$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in H_q^0(\text{div}; \Omega)$, $\mathbf{v} \in H_p^0(\text{rot}; \Omega)$, последовательности $\{\mathbf{u}_m\} \in \{\mathbf{D}(\Omega)\}^3$, $\{\mathbf{v}_m\} \in \{\mathbf{D}(\Omega)\}^3$ сходятся к $\mathbf{u}$ в $H_q(\text{div}; \Omega)$ и к $\mathbf{v}$ в $H_p(\text{rot}; \Omega)$ соответственно. Согласно теореме Юнга, $\Omega \subset B_R(\mathbf{y})$, где $R = \sqrt{6}d(\Omega)/4$.

Определим для каждого $m = 1, 2, \dots$ пробные функции $\mathbf{y}_m^R \in \{\mathbf{D}(B_R(\mathbf{y}))\}^n$, $\mathbf{j}_m^R \in \{\mathbf{D}(B_R(\mathbf{y}))\}^n$ соотношениями

$$\mathbf{y}_m^R(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{y}_m(\mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y}) \setminus \Omega; \end{cases} \quad \mathbf{j}_m^R(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{j}_m(\mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{y}) \setminus \Omega. \end{cases}$$

Пусть $p > 3$. Тогда, согласно теореме П.5,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R(\mathbf{y})} (\mathbf{y}_m^R \cdot \mathbf{j}_m^R) d\mathbf{x} \right| &\leq C_0(p, B_R(\mathbf{y})) \left(\|\mathbf{y}_m^R\|_{q, B_R(\mathbf{y})} \|\operatorname{rot} \mathbf{j}_m^R\|_{p, B_R(\mathbf{y})} + \|\operatorname{div} \mathbf{y}_m^R\|_{q, B_R(\mathbf{y})} \|\mathbf{j}_m^R\|_{p, B_R(\mathbf{y})} \right) = \\ &= C_0(p, B_R(\mathbf{y})) \left(\|\mathbf{y}_m^R\|_{q, \Omega} \|\operatorname{rot} \mathbf{j}_m^R\|_{p, \Omega} + \|\operatorname{div} \mathbf{y}_m^R\|_{q, \Omega} \|\mathbf{j}_m^R\|_{p, \Omega} \right). \end{aligned}$$

Так как $\left| \int_{B_R(\mathbf{y})} (\mathbf{y}_m^R \cdot \mathbf{j}_m^R) d\mathbf{x} \right| = \left| \int_{\Omega} (\mathbf{y}_m^R \cdot \mathbf{j}_m^R) d\mathbf{x} \right|$, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим (п.20),

где

$$C_4 = C_0(p, B_R(\mathbf{y})) = \frac{d(\Omega)}{p^{1/p}} \left(\frac{p-1}{p-3} \right)^{(p-1)/p} \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Если $p < 3$, то $q > 3/4$. Применим теорему П.6, согласно которой

$$\left| \int_{B_R(\mathbf{y})} (\mathbf{y}_m^R \cdot \mathbf{j}_m^R) d\mathbf{x} \right| \leq C_1(q, B_R(\mathbf{y})) \left(\|\mathbf{y}_m^R\|_{q, B_R(\mathbf{y})} \|\operatorname{rot} \mathbf{j}_m^R\|_{p, B_R(\mathbf{y})} + \|\operatorname{div} \mathbf{y}_m^R\|_{q, B_R(\mathbf{y})} \|\mathbf{j}_m^R\|_{p, B_R(\mathbf{y})} \right).$$

Переходя к пределу в неравенстве, получим оценку (п.20), где

$$C_4 = d(\Omega) \sqrt{\frac{3}{8}} \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p/(p-1)} (3-p)^{-1/p}.$$

Если $p = 3$, то заведомо $p > 3/2$. Применяя теорему П.4 к функциям $\mathbf{y}_R^m \in H_q^0(\operatorname{div}; B_R(\mathbf{y}))$, $\mathbf{j}_R^m \in H_p^0(\operatorname{rot}; B_R(\mathbf{y}))$, приходим к неравенству (п.21).

Следствия оценок при $p = 2$

Поскольку неравенства (п.14), (п.17) при $p = q = 2$ оценивают скалярные произведения функций в $\{L_2(\Omega)\}^3$, из них следуют известные условия ортогональности соленоидальных и потенциальных векторных полей для звездных областей.

Положив в неравенствах (п.14), (п.17) при $p = 2$ $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, получим оценки нормы функции $\mathbf{u}$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$ через нормы ее ротора и дивергенции.

Теорема П.9. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область с регулярной границей, звездная относительно некоторой точки. Найдется такая постоянная $C_6 > 0$, зависящая только от области Ω , что для всех $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H(\operatorname{div}; \Omega)$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{2, \Omega} \leq C_6 (\|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{2, \Omega} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{2, \Omega}). \quad (\text{п.22})$$

Доказательство. Положим в неравенстве (2.30) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

$$\|\mathbf{u}\|_{2, \Omega}^2 \leq C_3 (\|\mathbf{u}\|_{2, \Omega} \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{2, \Omega} + \|\mathbf{u}\|_{2, \Omega} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{2, \Omega}).$$

Умножив последнее неравенство на $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}^{-1}$, получим оценку (2.37), где $C_6 = C_3$.

Теорема П.10. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область с регулярной границей, звездная относительно некоторой точки. Найдется такая постоянная $C_7 > 0$, зависящая только от области Ω , что для всех $\mathbf{u} \in H(\text{rot}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq C_7 (\|\text{rot } \mathbf{u}\|_{2,\Omega} + \|\text{div } \mathbf{u}\|_{2,\Omega}). \quad (\text{п.23})$$

Доказательство. Положив в (п.14) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и разрешая полученное неравенство относительно $\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega}$, получим оценку (п.23), где $C_7 = C_1 + 1/4$.

Пусть $\Omega \subset R^3$ - произвольная ограниченная область.

Используя теоремы П.7, П.8, получаем, что справедливы следующие утверждения.

Теорема П.11. Пусть $\Omega \subset R^3$ - открытое ограниченное множество с диаметром $d(\Omega) > 0$. Тогда при всех $\mathbf{u} \in K^\perp(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{d^2(\Omega)}{16} \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})^2 d\mathbf{x}. \quad (\text{п.24})$$

Теорема П.12. Пусть $\Omega \subset R^3$ - ограниченная область с диаметром $d(\Omega) > 0$. Тогда при всех $\mathbf{u} \in H_0(\text{rot}; \Omega) \cap K^\perp(\text{rot}; \Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^2 d\mathbf{x} \leq \frac{3d^2(\Omega)}{16} \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{u})^2 d\mathbf{x}. \quad (\text{п.25})$$